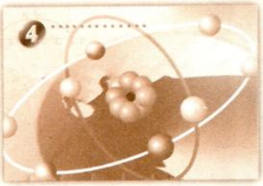
بۇ كىتابتىكى قىسمەن ماتېماتىكىلىق بەلگىلەر

$A \in a$	A نۇقتا a تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ
$A \notin a$	A نۇقتا a تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتمايدۇ
$A \in \alpha$	A نۇقتا α تەكشىلىكتە ياتىدۇ
$A \notin \alpha$	A نۇقتا α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا ياتىدۇ
$\alpha \cap \beta = a$	α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش سىزىقى a بولىدۇ
$a \subset \alpha$	a تۈز سىزىق α تەكشىلىكتە ياتىدۇ
$a \not\subset \alpha$	a تۈز سىزىق α تەكشىلىكتە ياتمايدۇ
$a \cap b = A$	a تۈز سىزىق بىلەن b تۈز سىزىق A نۇقتىدا كېسىشىدۇ
$a \cap \alpha = A$	a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك A نۇقتىدا كېسىشىدۇ
$a \parallel \alpha$	a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك ئۆزئارا پاراللېل
$\alpha \parallel \beta$	α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىك ئۆزئارا پاراللېل
$a \perp \alpha$	a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك ئۆزئارا تىك
$\alpha \perp \beta$	α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىك ئۆزئارا تىك
$\alpha - AB - \beta$ $(\alpha - l - \beta)$	قىرى AB، ياقلىرى α، β بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ (قىرى l، ياقلىرى α، β بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ)
k_l, k'_{AB}	l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى k، AB تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى k'
AB ياكى $\lvert AB \rvert$	AB كېسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى
$Oxyz$	بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى

مۇندەرىجە

3



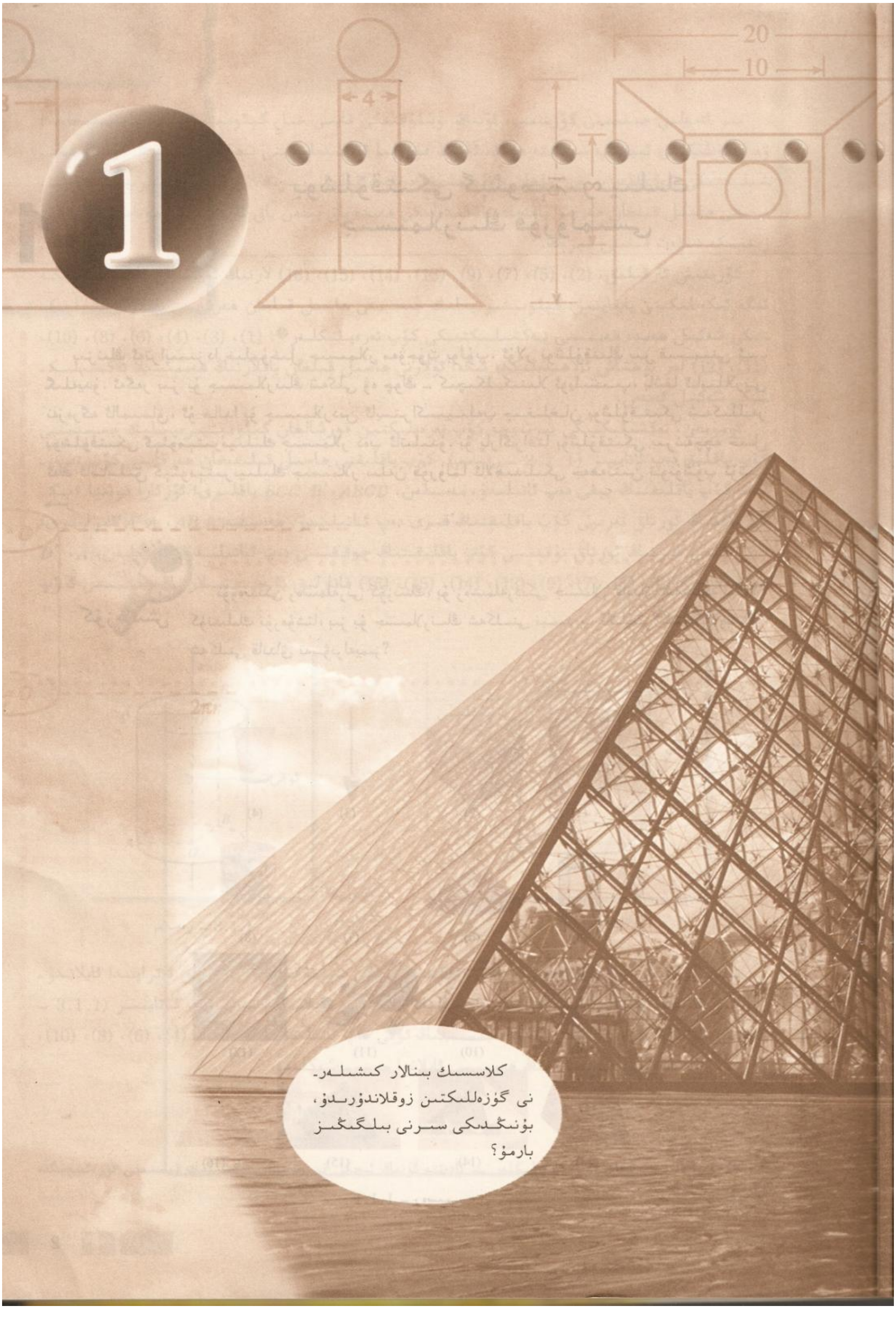
4

1 ـ باب

بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملار

گېئومېتىرىيە رېئال دۇنيادىكى جىسىملارنىڭ شەكلى، چوڭ ـ كىچىكلىكى ۋە ئورۇن مۇناسىۋىتىنى تەتقىق قىلىدىغان ماتېماتىكا پېنى. بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيەلىك جىسىملار گېئومېتىرىيىنىڭ مۇھىم تەركىبىي قىسمى بولۇپ، ئۇ ياغاچتاش قۇرۇلۇشى، مېخانىكىلىق لايىھىلەش، دېڭىز قاتنىشى خەرىتىچىلىكى قاتارلىق كۆپلىگەن ئەمەلىي مەسىلىلەردە كەڭ دائىرىدە قوللىنىلىدۇ.

بۇ بابتا بىز بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنى پۈتۈنلۈك جەھەتتىن كۆزىتىشتىن قول سېلىپ، بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى، ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى تەتقىق قىلىپ، بەزى ئاددىي گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمىنى ھېسابلاش ئۇسۇلىنى بىلىۋالىمىز.



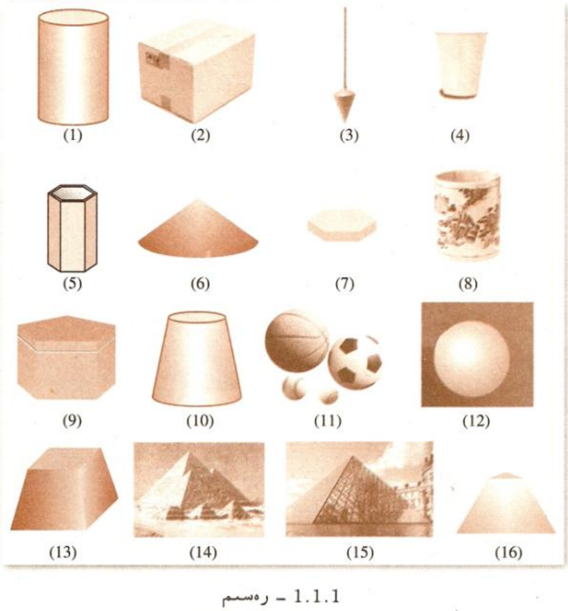
1
كىلاسسىك بىنالار كىشىلەر-
نى گۈزەللىكتىن زوقلاندۇرىدۇ،
بۇنىڭدىكى سىرنى بىلگىڭىز
بارمۇ؟

1-1 بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ قۇرۇلمىسى

بىزنىڭ ئەتراپىمىزدا خىلمۇخىل جىسىملار مەۋجۇت بولۇپ، ئۇلار بوشلۇقنىڭ بىر قىسمىنى ئىگىلەيدۇ. ئەگەر بىز بۇ جىسىملارنىڭ شەكلى ۋە چوڭ - كىچىكلىكىنىلا ئويلىشىپ، باشقا ئامىللارنى نەزەرگە ئالمىساق، ئۇ ھالدا بۇ جىسىملاردىن ئابستراكسىيىلەپ چىقىلغان بوشلۇقتىكى شەكىللەر **بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملار** دەپ ئاتىلىدۇ. بۇ پاراگرافتا بوشلۇقتىكى بىرنەچچە خىل ئەڭ ئاساسلىق گېئومېتىرىيىلىك جىسىملار بىلەن قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى جەھەتتىن تونۇشۇپ ئۆتىمىز.

كۆزىتىش

تۆۋەندىكى رەسىملەرنى كۆزىتىڭ، بۇ رەسىملەردىكى جىسىملار قانداق شەكىلگە ئىگە؟ كۈندىلىك تۇرمۇشتا، بىز بۇ جىسىملارنىڭ شەكلىنى نېمە دەپ ئاتايمىز؟ بىز ئۇلارنىڭ شەكلىنى قانداق تەسۋىرلەيمىز؟

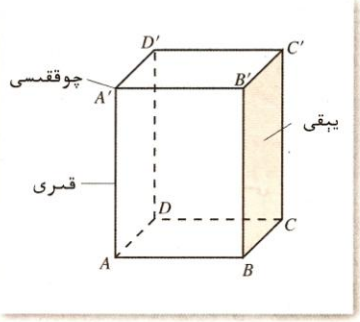


1.1.1 - رەسىم

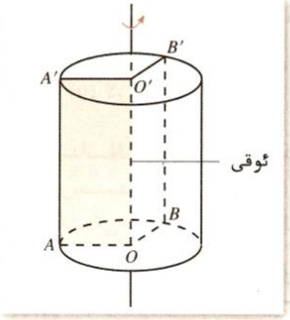
بىر ئەمەلىي جىسىمنى كۆزىتىپ، ئۇنىڭ بوشلۇقتىكى قايسى خىل گېئومېتىرىيىلىك جىسىمغا تەۋە ئىكەنلىكىنى ئېيتىپ بېرىشتە ھەمدە ئۇنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى تەھلىل قىلىشتا، ئۇنىڭ تەكشىلىكتىكى شەكىللەر بىلەن بولغان باغلىنىشىغا دىققەت قىلىش كېرەك. بۇ گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنى ھاسىل قىلغان ھەربىر ياقىنىڭ ئالاھىدىلىكى ھەمدە ياق بىلەن ياق ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆزىتىشكە دىققەت قىلىش كېرەك.

كۆزىتىش ئارقىلىق، (2)، (5)، (7)، (9)، (13)، (14)، (15)، (16) لارنىڭ ئوخشاش ئالاھىدىلىككە ئىگە ئىكەنلىكىنى بايقايمىز: گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنى ھاسىل قىلغان ھەرقايسى ياقلار تەكشىلىكتىكى شەكىل ھەمدە ھەممىسى تەكشىلىكتىكى كۆپ تەرەپلىكلەر[1]؛ (1)، (3)، (4)، (6)، (8)، (10)، (11)، (12) لەر ئوخشاش ئالاھىدىلىككە ئىگە: ئۇلارنى ھاسىل قىلغان ياقلارنىڭ ھەممىسىلا تەكشىلىكتىكى شەكىل ئەمەس.

ئومۇمەن، تەكشىلىكتىكى بىرنەچچە كۆپ تەرەپلىكتىن قورشالغان گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنى **كۆپ ياقلىق** دەپ ئاتايمىز (2.1.1 ـ رەسىم). كۆپ ياقلىقنى ھاسىل قىلىدىغان ھەرقايسى كۆپ تەرەپلىك كۆپ ياقلىقنىڭ **يېقى** دەپ ئاتىلىدۇ، مەسىلەن، $ABCD$، $BCC'B'$ ياقلىرى؛ ئۆزئارا قوشنا ئىككى ياقنىڭ ئورتاق تەرىپى كۆپ ياقلىقنىڭ **قىرى** دەپ ئاتىلىدۇ، مەسىلەن، AB، $A'A$ قىرلىرى؛ قىر بىلەن قىرنىڭ ئورتاق نۇقتىسى كۆپ ياقلىقنىڭ **چوققىسى** دەپ ئاتىلىدۇ، مەسىلەن، A، D' چوققىلىرى. (2)، (5)، (7)، (9)، (13)، (14)، (15)، (16) قاتارلىق بۇ جىسىملارنىڭ ھەممىسى كۆپ ياقلىق شەكلىدە.



2.1.1 ـ رەسىم



3.1.1 ـ رەسىم

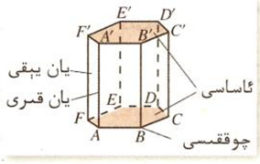
تەكشىلىكتىكى بىر شەكىلنى ئۇ ياتقان تەكشىلىكتىكى بىر مۇقىم تۈز سىزىق ئەتراپىدا ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان يېپىق گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنى **ئايلانما جىسىم** دەپ ئاتايمىز (3.1.1 ـ رەسىم). بۇ مۇقىم تۈز سىزىق ئايلانما جىسىمنىڭ **ئوقى** دەپ ئاتىلىدۇ. (1)، (3)، (4)، (6)، (8)، (10)، (11)، (12) قاتارلىق جىسىملارنىڭ ھەممىسى ئايلانما جىسىم شەكلىدە.

[1] بۇ بابتا ئېيتىلغان كۆپ تەرەپلىكلەر — ئادەتتە ئۇنىڭ ئىچكى قىسمىدىكى تەكشىلىك قىسمىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ.

1-1-1 تۆۋرۆكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىملارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى

1. پرىزمىنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى

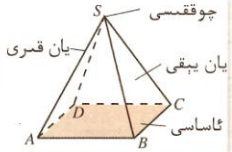
1.1.1 - رەسىمدىكى (2) بىزگە ناھايىتى تونۇشلۇق بولغان پاراللېلېپىپېد شەكىللىك ئوراش قۇتىسى بولۇپ، ئۇنىڭ ھەربىر يېقى پاراللېل تۆت تەرەپلىك (تىك تۆتبۇلۇڭ) ھەمدە ئۆزئارا قارىمۇقارشى ئىككى يېقى بىزگە پاراللېللىق ئوبرازىنى بېرىدۇ، خۇددى تورۇس بىلەن پولغا ئوخشاش.



1.1.4 - رەسىم

4.1.1 - رەسىمدىكىدەك، ئومۇمەن، ئىككى يېقى ئۆزئارا پاراللېل، قالغان ياقلىرى تۆت تەرەپلىك ھەمدە ئۆزئارا قوشنا ھەر ئىككى تۆت تەرەپلىكنىڭ ئورتاق تەرەپلىرى ئۆزئارا پاراللېل بولغان ياقلار ئارقىلىق قورشالغان كۆپ ياقلىق **پرىزما** (prism) دەپ ئاتىلىدۇ. پرىزمىدا، ئۆزئارا پاراللېل بولغان ئىككى ياق پرىزمىنىڭ **ئاساسى (ئاساسىي يېقى)** دېيىلىدۇ؛ قالغان ياقلىرى پرىزمىنىڭ **يان ياقلىرى** دېيىلىدۇ؛ ئۆزئارا قوشنا يان ياقلىرىنىڭ ئورتاق تەرىپى پرىزمىنىڭ **يان قىرى** دېيىلىدۇ؛ يان ياقلىرى بىلەن ئاساسىنىڭ ئورتاق چوققىسى پرىزمىنىڭ **چوققىسى** دېيىلىدۇ. ئاساسى ئۈچبۇلۇڭ، تۆت تەرەپلىك، بەش تەرەپلىك... بولغان پرىزمىلار ئايرىم - ئايرىم ئۈچ قىرلىق پرىزما، تۆت قىرلىق پرىزما، بەش قىرلىق پرىزما... دەپ ئاتىلىدۇ، پرىزمىنى ئۆزىنىڭ ئاساسىدىكى ھەرقايسى چوققىلارنى ئىپادىلەيدىغان ھەرپلەر ئارقىلىق ئىپادىلەيمىز، 4.1.1 - رەسىمدىكى ئالتە قىرلىق پرىزمىنى پرىزما $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$ قىلىپ ئىپادىلەيمىز. 1.1.1 - رەسىمدىكى (5)، (7)، (9) لار پرىزمىنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئىگە جىسىملاردۇر.

2. پىرامىدانىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى



5.1.1 - رەسىم

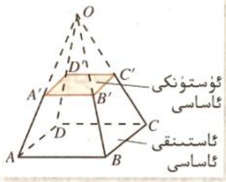
1.1.1 - رەسىمدىكى (14) ۋە (15) تىن ئىبارەت بۇنداق كۆپ ياقلىق تەكشىلىكتىكى شەكىللەر ئارقىلىق قورشالغان بولۇپ، ئۇنىڭ بىر يېقى كۆپ تەرەپلىك، قالغان ياقلىرى ئوخشاشلا ئۈچبۇلۇڭ ھەمدە بۇ ئۈچبۇلۇڭلار بىر ئورتاق چوققىغا ئىگە.

5.1.1 - رەسىمدىكىدەك، ئومۇمەن، بىر يېقى كۆپ تەرەپلىك، قالغان ياقلىرى بىر ئورتاق چوققىغا ئىگە ئۈچبۇلۇڭ بولغان ياقلاردىن قورشالغان كۆپ ياقلىق **پىرامىدا** (pyramid) دەپ ئاتىلىدۇ. بۇ كۆپ تەرەپلىك **پىرامىدانىڭ ئاساسى (ئاساسىي يېقى)** دېيىلىدۇ؛ ئورتاق چوققىغا ئىگە ھەرقايسى ئۈچبۇلۇڭ شەكىللىك ياقلار **پىرامىدانىڭ يان يېقى** دېيىلىدۇ؛ ھەرقايسى يان ياقلىرىنىڭ ئورتاق **چوققىسى پىرامىدانىڭ چوققىسى** دېيىلىدۇ؛ ئۆزئارا قوشنا يان ياقلىرىغا ئورتاق بولغان تەرەپ **پىرامىدانىڭ يان قىرى** دېيىلىدۇ. ئاساسى ئۈچبۇلۇڭ، تۆت تەرەپلىك، بەش تەرەپلىك ... بولغان پىرامىدالار ئايرىم - ئايرىم ئۈچ قىرلىق پىرامىدا، تۆت قىرلىق پىرامىدا، بەش قىرلىق پىرامىدا ... دەپ ئاتىلىدۇ. بۇنىڭ ئىچىدە ئۈچ قىرلىق پىرامىدا يەنە تۆت ياقلىق دەپمۇ ئاتىلىدۇ. پىرامىدامۇ ئۆزىنىڭ چوققىسى ۋە ئاساسىدىكى ھەرقايسى چوققىلارنى ئىپادىلەيدىغان ھەرپلەر ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، 5.1.1 - رەسىمدىكى تۆت قىرلىق پىرامىدا $S-ABCD$ قىلىپ ئىپادىلىنىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

1.1.1 ـ رەسىمدىكى (13)، (16) لەرنىڭ گېئومېترىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى قانداق تەسۋىرلەش كېرەك؟ ئۇلار بىلەن پىرامىدانىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟

3. كېسىك پىرامىدانىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى



6.1.1 ـ رەسىم

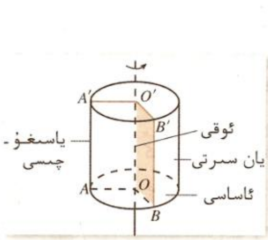
بىز پىرىزما ۋە پىرامىدانى ئۆگىنىپ ئۆتتۇق، ئەمما 1.1.1 ـ رەسىمدىكى (13) ۋە (16) گە ئوخشاش بۇ خىل قۇرۇلمىدىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى تېخى ئۆگەنمىدۇق. (13) ۋە (16) گە ئوخشاش بۇ خىل گېئومېترىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئىگە كۆپ ياقلىقلار بولسا پىرامىدانى ئۇنىڭ ئاساسىغا پاراللېل بولغان بىر تەكشىلىك ئارقىلىق كەسكەندە، ئاساسى بىلەن كەسمە يۈز ئارىسىدىكى قىسمىدىن ئىبارەت، بۇنداق كۆپ ياقلىقلار (6.1.1 ـ رەسىم) **كېسىك پىرامىدا** (frustum of a pyramid) دەپ ئاتىلىدۇ. ئەسلىدىكى پىرامىدانىڭ ئاساسى بىلەن كەسمە يۈزى ئايرىم ـ ئايرىم كېسىك پىرامىدانىڭ **ئاستىنقى ئاساسى** ۋە **ئۈستۈنكى ئاساسى** دېيىلىدۇ، كېسىك پىرامىدانىڭمۇ يان يېقى، يان قىرى، چوققىلىرى بولىدۇ.

ئىزدىنىش

پىرامىدانىڭ يان يېقى، يان قىرى، چوققىلىرىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا تەقلىد قىلىپ، كېسىك پىرامىدانىڭ يان يېقى، يان قىرى، چوققىلىرىغا ئېنىقلىما بېرىڭ ھەمدە 6.1.1 ـ رەسىمدە ئۇلارنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.

ئۈچ قىرلىق پىرامىدا، تۆت قىرلىق پىرامىدا، بەش قىرلىق پىرامىدا... لارنى كېسىشتىن ھاسىل بولغان كېسىك پىرامىدالار ئايرىم ـ ئايرىم ئۈچ قىرلىق كېسىك پىرامىدا، تۆت قىرلىق كېسىك پىرامىدا، بەش قىرلىق كېسىك پىرامىدا... دەپ ئاتىلىدۇ، بۇلارنى پىرىزمىنى ئىپادىلىگەنگە ئوخشاش ئىپادىلەيمىز، 6.1.1 ـ رەسىمدىكى تۆت قىرلىق كېسىك پىرامىدانى كېسىك پىرامىدا $ABCD-A'B'C'D'$ قىلىپ ئىپادىلەيمىز.

4. سىلىندىرنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى



7.1.1 ـ رەسىم

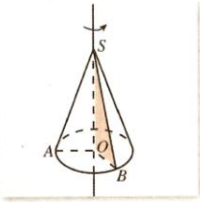
7.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ بىر تەرىپى ياتقان تۈز سىزىقنى ئايلىنىش ئوقى قىلىپ، قالغان ئۈچ تەرىپىنىڭ ئايلىنىشىدىن ھاسىل بولغان ياقتىن قورشالغان ئايلانما جىسىم **سىلىندىر** (circular cylinder) دەپ ئاتىلىدۇ. ئايلىنىش ئوقى **سىلىندىرنىڭ ئوقى** دېيىلىدۇ؛ ئوققا تىك بولغان تەرەپنىڭ ئايلىنىشىدىن ھاسىل بولغان چەمبەر يۈزى **سىلىندىرنىڭ ئاساسى** دې-

يىلىدۇ؛ ئوققا پاراللېل بولغان تەرەپنىڭ ئايلىنىشىدىن ھاسىل بولغان ئەگرى يۈز **سىلىندىرنىڭ يان سىرتى** دېيىلىدۇ؛ مەيلى ئايلىنىپ قايسى ئورۇنغا بارسۇن، ئوققا تىك بولمىغان تەرەپ **سىلىندىر يان سىرتىنىڭ ياسىغۇچىسى** دېيىلىدۇ.

تۇرمۇشىمىزدا، نۇرغۇنلىغان ئىدىش (قاچا) ۋە جىسىملار سىلىندىر شەكلىدە بولىدۇ، مەسىلەن، 1.1.1 ـ رەسىمدىكى (1) ۋە (8). سىلىندىر ئۆزىنىڭ ئوقىنى ئىپادىلەيدىغان ھەرپ بىلەن ئىپادىلىنىدۇ، 7.1.1 ـ رەسىمدىكى سىلىندىرنى سىلىندىر OO' قىلىپ ئىپادىلەيمىز.

سىلىندىر بىلەن پرىزما ئومۇملاشتۇرۇلۇپ تۈۋرۈكسىمان جىسىم دەپ ئاتىلىدۇ.

5. كونۇسنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى



8.1.1 ـ رەسىم

سىلىندىرغا ئوخشاش، كونۇسنىمۇ تەكشىلىكتىكى شەكىلنى ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان دەپ قاراشقا بولىدۇ. مەسىلەن، 8.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ بىر تىك تەرىپى ياتقان تۈز سىزىقنى ئايلىنىش ئوقى قىلىپ، قالغان ئىككى تەرىپىنى ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان ياقتىن قورشالغان ئايلانما جىسىم **كونۇس** (circular cone) دەپ ئاتىلىدۇ. 1.1.1 ـ رەسىمدىكى (3) ۋە (6) كونۇس شەكىللىك جىسىملاردۇر. كونۇسنىڭمۇ ئوقى، ئاساسى، يان سىرتى ۋە ياسىغۇچىسى بولىدۇ.

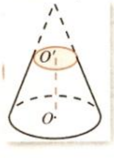
ئىزدىنىش

سىلىندىرنىڭ ئوقى، ئاساسى، يان سىرتى، ياسىغۇچىلىرىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا تەقلىد قىلىپ، كونۇسنىڭ ئوقى، ئاساسى، يان سىرتى، ياسىغۇچىلىرىغا ئېنىقلىما بېرىڭ ھەمدە 8.1.1 ـ رەسىمدە ئۇلارنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.

كونۇسمۇ ئۆزىنىڭ ئوقىنى ئىپادىلەيدىغان ھەرپ بىلەن ئىپادىلىنىدۇ، 8.1.1 ـ رەسىمدىكى كونۇسنى كونۇس SO قىلىپ ئىپادىلەيمىز.

پىرامىدا بىلەن كونۇس ئومۇملاشتۇرۇلۇپ بىگىزسىمان جىسىم دەپ ئاتىلىدۇ.

6. كېسىك كونۇسنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى



9.1.1 ـ رەسىم

كېسىك پىرامىداغا ئوخشاش، كونۇسنى ئۇنىڭ ئاساسىغا پاراللېل بولغان تەكشىلىك ئارقىلىق كەسكەندە، ئاساسى بىلەن كەسمە يۈز ئارىسىدىكى قىسمى (9.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك) **كېسىك كونۇس** (frustum of a cone) دەپ ئاتىلىدۇ. 1.1.1 ـ رەسىمدىكى (4) ۋە (10) كېسىك كونۇسنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئىگە جىسىملاردۇر.

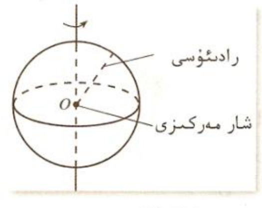
سىلىندىر ۋە كونۇسقا ئوخشاش، كېسىك كونۇسنىڭمۇ ئوقى، ئاساسى، يان سىرتى، ياسىغۇچىسى بولىدۇ. سىز 9.1.1 ـ رەسىمدە ئۇلارنى كۆرسىتىپ بېرىڭ ھەمدە 9.1.1 ـ رەسىمدىكى كېسىك كونۇسنى ھەرپ ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.

كېسىك پىرامىدا بىلەن كېسىك كونۇس ئومۇملاشتۇرۇلۇپ كەسمە جىسىم دەپ ئاتىلىدۇ.

ئىزدىنىش

تىك تۆتبۇلۇڭنى ئايلاندۇرۇش ئارقىلىق سىلىندىرغا ئېرىشكىلى بولىدۇ، تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنى ئايلاندۇرۇش ئارقىلىق كونۇسقا ئېرىشكىلى بولىدۇ. تەكشىلىكتىكى قايسى شەكىلنى ئايلاندۇرۇش ئارقىلىق كېسىك كونۇسقا ئېرىشكىلى بولىدۇ؟ قانداق ئايلاندۇرۇش كېرەك؟

7. شارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى



10.1.1 ـ رەسىم

10.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، يېرىم چەمبەرنىڭ دىئامېتىرى ياتقان تۈز سىزىقنى ئايلىنىش ئوقى قىلىپ، يېرىم چەمبەر يۈزىنى تولۇق بىر قېتىم ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان ئايلانما جىسىم **شارسىمان جىسىم** (solid sphere) دەپ ئاتىلىدۇ، قىسقىچە **شار** دېيىلىدۇ. يېرىم چەمبەرنىڭ مەركىزى **شار مەركىزى** دېيىلىدۇ، يېرىم چەمبەرنىڭ رادىئۇسى شارنىڭ **رادىئۇسى** دېيىلىدۇ، يېرىم چەمبەرنىڭ دىئامېتىرى شارنىڭ **دىئامېتىرى** دېيىلىدۇ. 1.İ.1 ـ رەسىمدىكى (11)، (12) لەر شارنىڭ گېئومېترىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئىگە جىسىملاردۇر. ئادەتتە شار ئۆزىنىڭ مەركىزىنى ئىپادىلەيدىغان ھەرپ O ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، 10.1.1 ـ رەسىمدىكى شارنى O شار قىلىپ ئىپادىلەيمىز

ئىزدىنىش

پىرىزما، پىرامىدا، كېسىك پىرامىدالارنىڭ ھەممىسى كۆپ ياقلىقلاردۇر، ئۇلار قۇرۇلما جەھەتتە قانداق ئوخشاشلىق ۋە ئوخشىماسلىقلارغا ئىگە؟ ئۈچىنىڭ ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ ئاساسىدا ئۆزگىرىش بولغاندا، ئۇلار بىر ـ بىرىگە ئايلىنالامدۇ؟ سىلىندىر، كونۇس ۋە كېسىك كونۇسلارچۇ؟

2-1-1 ئاددىي بىرىكمە جىسىملارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى

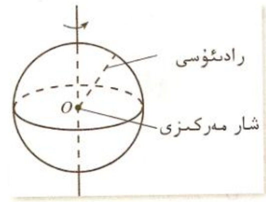
رېئال دۇنيادىكى جىسىملار ئىپادىلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملار تۆۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم ۋە شارسىمان جىسىم قاتارلىق ئاددىي گېئومېترىيىلىك جىسىملاردىن باشقا، يەنە كۆپلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملار ئاددىي گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل بولىدۇ، بۇ گېئومېترىيىلىك جىسىملار ئاددىي بىرىكمە جىسىملار دەپ ئاتىلىدۇ.

ئاددىي بىرىكمە جىسىملارنىڭ تۈزۈلىشىنىڭ ئىككى خىل ئاساسىي شەكلى بار: بىر خىلى ئاددىي گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل بولىدۇ، 11.1.1 ـ رەسىمدىكى (1)، (2) جىسىملار ئىپادىلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملار؛ يەنە بىر خىلى، ئاددىي گېئومېترىيىلىك جى-

ئىزدىنىش

تىك تۆتبۇلۇڭنى ئايلاندۇرۇش ئارقىلىق سىلىندىرغا ئېرىشكىلى بولىدۇ، تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنى ئايلاندۇرۇش ئارقىلىق كونۇسقا ئېرىشكىلى بولىدۇ. تەكشىلىكتىكى قايسى شەكىلنى ئايلاندۇرۇش ئارقىلىق كېسىك كونۇسقا ئېرىشكىلى بولىدۇ؟ قانداق ئايلاندۇرۇش كېرەك؟

7. شارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى



10.1.1 ـ رەسىم

10.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، يېرىم چەمبەرنىڭ دىئامېتىرى ياتقان تۈز سىزىقنى ئايلىنىش ئوقى قىلىپ، يېرىم چەمبەر يۈزىنى تولۇق بىر قېتىم ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان ئايلانما جىسىم **شارسىمان جىسىم** (solid sphere) دەپ ئاتىلىدۇ، قىسقىچە **شار** دېيىلىدۇ. يېرىم چەمبەرنىڭ مەركىزى **شار مەركىزى** دېيىلىدۇ، يېرىم چەمبەرنىڭ رادىئۇسى شارنىڭ **رادىئۇسى** دېيىلىدۇ، يېرىم چەمبەرنىڭ دىئامېتىرى شارنىڭ **دىئامېتىرى** دېيىلىدۇ. 1.1.1 ـ رەسىمدىكى (11)، (12) لەر شارنىڭ گېئومېترىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئىگە جىسىملاردۇر. ئادەتتە شار ئۆزىنىڭ مەركىزىنى ئىپادىلەيدىغان ھەرپ O ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، 10.1.1 ـ رەسىمدىكى شارنى O شار قىلىپ ئىپادىلەيمىز

ئىزدىنىش

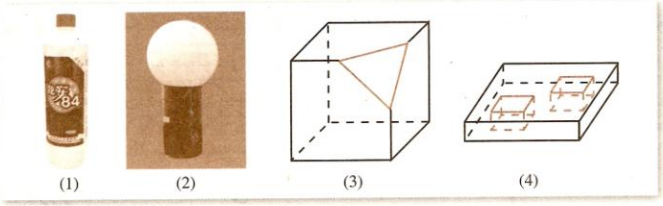
پرىزما، پىرامىدا، كېسىك پىرامىدالارنىڭ ھەممىسى كۆپ ياقلىقلاردۇر، ئۇلار قۇرۇلما جەھەتتە قانداق ئوخشاشلىق ۋە ئوخشىماسلىقلارغا ئىگە؟ ئۇچىنىڭ ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ ئاساسىدا ئۆزگىرىش بولغاندا، ئۇلار بىر ـ بىرىگە ئايلىنالامدۇ؟ سىلىندىر، كونۇس ۋە كېسىك كونۇسلارچۇ؟

2-1-1 ئاددىي بىرىكمە جىسىملارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى

رېئال دۇنيادىكى جىسىملار ئىپادىلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملار تۆۋرۈكسىمان جىسىم، پىرامىداسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم ۋە شارسىمان جىسىم قاتارلىق ئاددىي گېئومېترىيىلىك جىسىملاردىن باشقا، يەنە كۆپلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملار ئاددىي گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل بولىدۇ، بۇ گېئومېترىيىلىك جىسىملار ئاددىي بىرىكمە جىسىملار دەپ ئاتىلىدۇ.

ئاددىي بىرىكمە جىسىملارنىڭ تۈزۈلىشىنىڭ ئىككى خىل ئاساسىي شەكلى بار: بىر خىلى ئاددىي گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل بولىدۇ، 11.1.1 ـ رەسىمدىكى (1)، (2) جىسىملار ئىپادىلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملار؛ يەنە بىر خىلى، ئاددىي گېئومېترىيىلىك جى-

-سىملارنىڭ بىر قىسمىنى كېسىپ ئېلىۋېتىش ياكى ئويۇپ ئېلىۋېتىشتىن ھاسىل بولىدۇ، 11.1.1 - رەسىمدىكى (3)، (4) جىسىملار ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىملار.

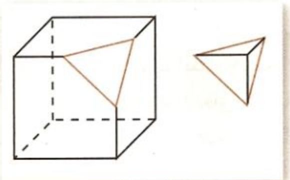


11.1.1 - رەسىم

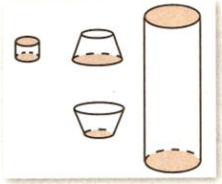
كۆزىتىش

11.1.1 - رەسىمدىكى (1)، (3) ئىككى جىسىم ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنى كۆزىتىپ، ئۇلارنىڭ قايسى ئاددىي گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل قىلىنغانلىقىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

11.1.1 - رەسىمدىكى (1) جىسىم ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىم ئىككى سىلىندىر ۋە ئىككى كېسىك كونۇسنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل بولغان، 12.1.1 - رەسىمدىكىدەك؛ 11.1.1 - رەسىمدىكى (3) جىسىم ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىم بىر پاراللېلېپىپېدتىن بىر ئۈچ قىرلىق پىرامىدانى كېسىپ ئېلىۋېتىشتىن كېلىپ چىققان، 13.1.1 - رەسىمدىكىدەك.



13.1.1 - رەسىم

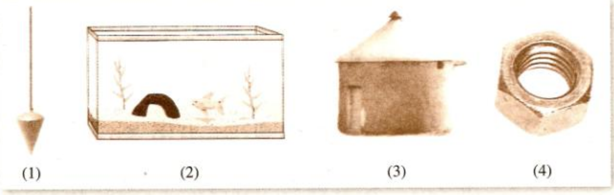


12.1.1 - رەسىم

رېئال دۇنيادا، بىز كۆرۈۋاتقان جىسىملارنىڭ كۆپىنچىسى تۇۋرۇكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىم قاتارلىق گېئومېتىرىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئىگە جىسىملارنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل بولغان.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى جىسىملارنىڭ ئاساسلىق گېئومېتىرىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرىڭ.



(1 - مىسال ئۈچۈن)

2. تۆۋەندە بېرىلگەن گېئومېتىرىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە دائىر بايانلارغا ئاساسەن، گېئومېتىرىيە-لىك جىسىمنىڭ نامىنى ئېيتىپ بېرىڭ.

(1) 7 دانە ياقتىن قورشالغان، ئۇنىڭ ئىچىدىكى ئىككى يېقى ئۆزئارا پاراللېل ھەمدە تەڭ بولغان بەش تەرەپ-لىك، قالغان ياقلىرى تەڭ بولغان تىك تۆتبۇلۇڭدىن ئىبارەت؛

(2) بىر تەڭ يانلىق ئۇچبۇلۇڭنى ئۆزىنىڭ ئاساسىغا چۈشۈرۈلگەن ئېگىزلىكى ياتقان تۈز سىزىق ئەتراپىدا 180° ئايلاندۇرۇشتىن شەكىللەنگەن يېپىق ئەگرى سىرت ئارقىلىق قورشالغان شەكىل.

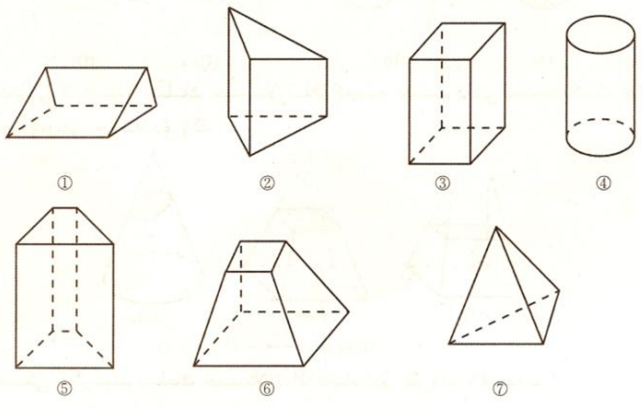
3. ئەتراپىڭىزدىكى جىسىملارنى كۆزىتىڭ ھەمدە بۇ جىسىملار ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىملار-نىڭ ئاساسلىق قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرىڭ.

1.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. توغرا جاۋابنى تاللاڭ.

(1) تۆۋەندىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملار ئىچىدە پىرىزمىدىن (　) دانە بار



A.1　　B.2　　C.3　　D.4

(2) تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىچىدە توغرا بولغىنى (　)

A. ئىككى يېقى پاراللېل، قالغان ياقلىرى تۆت تەرەپلىك بولغان گېئومېتىرىيىلىك جىسىم پىرىزما دەپ ئاتىلىدۇ.

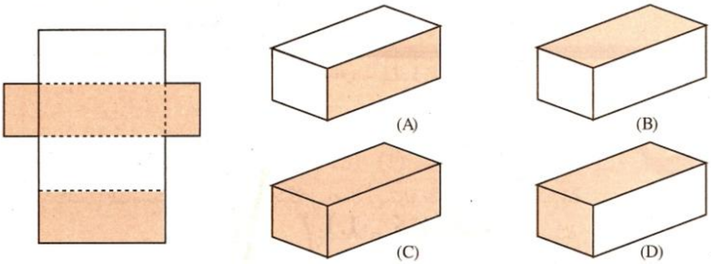
B. ئىككى يېقى پاراللېل، قالغان ياقلىرى پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولغان گېئومېتىرىيىلىك جىسىم پىرىزما دەپ ئاتىلىدۇ.

C. ئىككى يېقى پاراللېل، قالغان ياقلىرى تۆت تەرەپلىك ھەمدە ئۆزئارا قوشنا ھەر ئىككى تۆت

تەرەپلىكنىڭ ئورتاق تەرەپلىرى ئۆزئارا پاراللېل بولغان گېئومېترىيىلىك جىسىم پىرىزما دەپ ئا- تىلىدۇ.

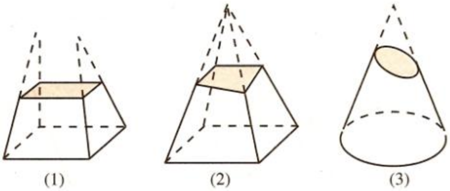
D. بىر تەكشىلىك ئارقىلىق پىرامىدانى كەسكەندە، ئاساسى بىلەن كەسمە يۈز ئارىسىدىكى قىسمىدىن تەركىب تاپقان گېئومېترىيىلىك جىسىم كېسىك پىرامىدا دەپ ئاتىلىدۇ.

(3) رەسىمدىكىدەك، ئوڭ تەرەپتىكى پاراللېلېپىپېدلار ئىچىدە سول تەرەپتىكى تەكشىلىكتىكى شەكىل ئارقىلىق قورشالغىنى (D).



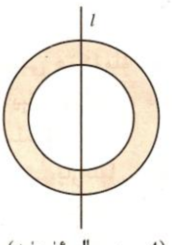
(4) يەل قاچىلانغان ئاپتوموبىل چاقىنىڭ ئىچكى بالونى تۆۋەندىكى مەلۇم شەكىلنى سىممېترىك ئوقى ئەتراپىدا ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل قىلىنغان، بۇ شەكىل (C).

2. تۆۋەندىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ كەسمە جىسىم ياكى ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قى- لىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

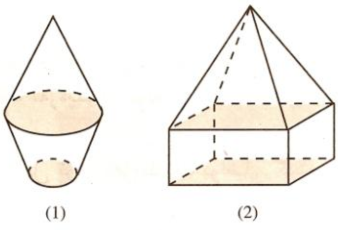


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. تۆۋەندىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ ئاساسلىق قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرىڭ:



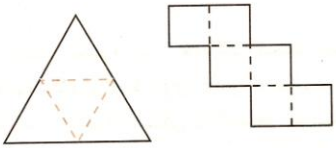
(4 ـ مىسال ئۈچۈن)



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

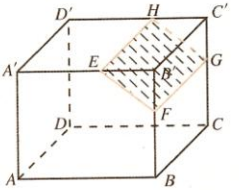
4. رەسىمدىكىدەك، بىر ھالقىنى چەمبەر مەركىزىدىن ئۆتكەن l تۈز سىزىق ئەتراپىدا $180°$ ئايلاندۇرساق، ئۇنىڭدىن ھاسىل بولىدىغان گېئومېترىيىلىك جىسىمنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ ھەمدە ئۇنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرىڭ.

5. رەسىمدە بېرىلگەن تەكشىلىكتىكى شەكىلنى مۇۋاپىق نىسبەتتە چوڭايتىپ، ئايرىم - ئايرىم تۆت ياقلىق ۋە كۇب ياساڭ ھەمدە تەكشىلىكتىكى شەكىل بىلەن بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ مۇناسىۋىتىنى چۈشەندۈرۈڭ.



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

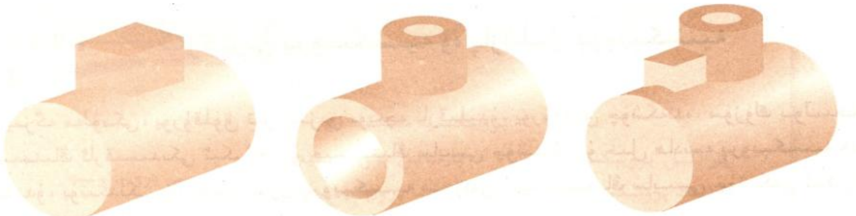
B گۇرۇپپا



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ دىن بىر بۆلەك كېسىۋېلىنغان، ئۇنىڭ ئىچىدە $EH // A'D'$ بولسا، ئېشىپ قالغىنى قانداق گېئومېترىيىلىك جىسىم؟ كېسىۋېلىنغىنى قانداق گېئومېترىيىلىك جىسىم؟ سىز ئۇلارنىڭ نامىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

2. تۆۋەندىكى جىسىملار ئېپادىلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ گېئومېترىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى مۇھاكىمە قىلىڭ.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2-1 بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلى

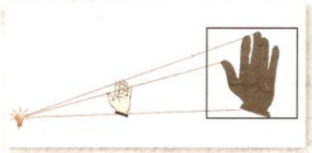
ئالدىدا بىز تۆۋرۈكسىمان جىسىم، پىرامىدىسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىم ۋە ئاددىي بىرىكمە جىسىملارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكلىرى بىلەن تونۇشۇپ ئۆتتۇق. بۇ بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى قەغەزگە، تەكشىلىكتىكى شەكىللەر ئارقىلىق ئىپادىلەپ، تەكشىلىكتىكى شەكىللەرگە ئاساسەن بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ شەكلى ۋە قۇرۇلمىسىنى تەسەۋۋۇر قىلىشىمىز ئۈچۈن، كۆرۈنۈشكە دائىر بىلىملەرنى ئۆگىنىشىمىزگە توغرا كېلىدۇ.

بىز ئادەتتە ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىل ۋە كۆرسەتمىلىك شەكىل ئارقىلىق بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى ئىپادىلەيمىز. ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىل بولسا كۆزەتكۈچىنىڭ ئوخشىمىغان ئۈچ ئورۇندا تۇرۇپ ئوخشاش بىر بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىمنى كۆزىتىشى ئارقىلىق سىزىپ چىققان شەكىلدىن ئىبارەت؛ كۆرسەتمىلىك شەكىل بولسا كۆزەتكۈچىنىڭ مەلۇم بىر نۇقتىدا تۇرۇپ بىر بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىمنى كۆزىتىشى ئارقىلىق سىزىپ چىققان شەكىلدىن ئىبارەت. ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىل ۋە كۆرسەتمىلىك شەكىل بىناكارلىق قۇرۇلۇشى، مېخانىكىلىق ياساش ۋە كۈندىلىك تۇرمۇشتا مۇھىم ئەھمىيەتكە ئىگە. بىز بۇ پاراگرافتا پروپېكسىيە بىلىملىرىنى ئۆگىنىش ئاساسىدا، بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى ئۆگىنىمىز.

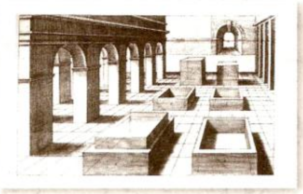
1-2-1 مەركىزىي پروپېكسىيە ۋە پاراللېل پروپېكسىيە

بىزگە مەلۇمكى، يورۇقلۇق تۈز سىزىق بويىچە تارقىلىدۇ. يورۇقلۇق چۈشكەندە، سۈزۈك بولمىغان جىسىمنىڭ ئارقىسىدىكى ئېكرانغا بۇ جىسىمنىڭ سايىسى چۈشىدۇ، بۇ خىل ھادىسە **پروپېكسىيە** دەپ ئاتىلىدۇ، بۇنىڭدىكى يورۇقلۇق نۇرى **پروپېكسىيە سىزىقى**، جىسىمنىڭ سايىسى چۈشكەن ئېكران **پروپېكسىيە تەكشىلىكى** دەپ ئاتىلىدۇ.

يورۇقلۇقنىڭ بىر نۇقتىدىن چىقىپ سىرتقا تارقىلىشىدىن ھاسىل بولغان پروپېكسىيىنى **مەركىزىي پروپېكسىيە** دەپ ئاتايمىز. مەركىزىي پروپېكسىيىنىڭ پروپېكسىيە سىزىقلىرى بىر نۇقتىدا كېسىشىدۇ. مەركىزىي پروپېكسىيە ھادىسىسى بىزنىڭ كۈندىلىك تۇرمۇشىمىزدا ئىنتايىن كۆپ ئۇچرايدۇ. مەسىلەن، لامپۇچكىنىڭ يورۇقى ئاستىدا جىسىمنىڭ ئارقىسىدىكى ئېكراندا سايە ھاسىل بولىدۇ ھەمدە جىسىم بىلەن لامپۇچكا (ياكى ئېكران) ئارىسىدىكى ئارىلىقنىڭ يىراق - يېقىنلىقىغا ئەگىشىپ، ھاسىل بولغان سايىنىڭمۇ چوڭ - كىچىكلىكى ئوخشىمايدۇ (1.2.1 - رەسىم). ئۇنىڭدىن باشقا، كىشىلەر مەركىزىي پروپېكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ رەسىم سىزىدۇ، نەتىجىدە سىزىپ چىقىلغان گۈزەل سەنئەت ئەسەرلىرى بىلەن كىشىلەرنىڭ كۆرۈش سەزگۈسىنىڭ ئۇنۇمى بىردەك بولىدۇ (2.2.1 - رەسىم).



1.2.1 ـ رەسىم

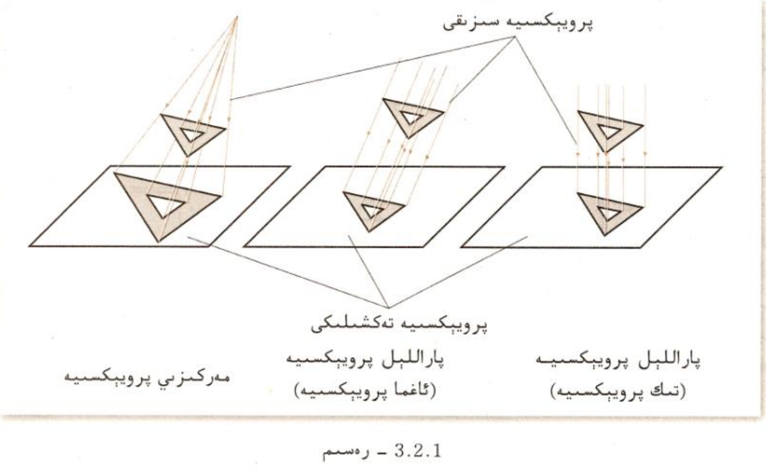


2.2.1 ـ رەسىم

بىر دەستە پاراللېل يورۇقلۇق نۇرلىرىنىڭ يورۇتۇشىدىن ھاسىل بولغان پروييېكسىيىنى **پاراللېل پروييېكسىيە** دەپ ئاتايمىز. پاراللېل پروييېكسىيىنىڭ پروييېكسىيە سىزىقلىرى پاراللېل بولىدۇ. پارال ـ لېل پروييېكسىيىدە، پروييېكسىيە سىزىقلىرى پروييېكسىيە تەكشىلىكىگە تىك بولغاندا، تىك پروييېكسىيە دەپ ئاتىلىدۇ، ئەكسىچە بولغاندا ئاغما پروييېكسىيە دەپ ئاتىلىدۇ.

پاراللېل پروييېكسىيىدە، پروييېكسىيە تەكشىلىكىگە پاراللېل بولغان تەكشىلىكتىكى شەكىلنىڭ سا ـ يىسى بىلەن بۇ تەكشىلىكتىكى شەكىلنىڭ شەكلى ۋە چوڭ ـ كىچىكلىكى پۈتۈنلەي ئوخشاش بولىدۇ.

بىر ئۈچبۇلۇڭلۇق سىزغۇچنىڭ مەركىزىي پروييېكسىيە ۋە ئوخشىمىغان يۆنىلىشتىكى پاراللېل پرو ـ يېكسىيە ئاستىدا ھاسىل بولغان پروييېكسىيىسى 3.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك كۆرسىتىلگەن.



3.2.1 ـ رەسىم

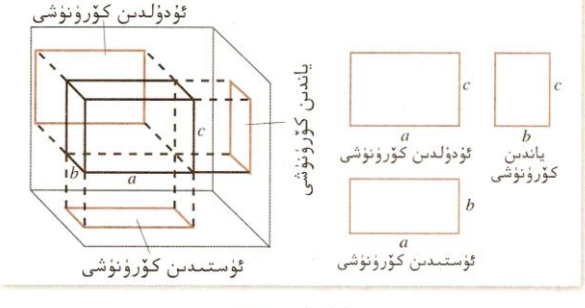
پاراللېل پروييېكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ، بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقىمىز.

2-2-1 بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى

1. تۆۋرۈكسىمان جىسىم، يىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى

بوشلۇقتىكى بىر گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنى بىر تەكشىلىككە پرويېكسىيىلىسەك، تەكشىلىكتىكى بىر شەكىل كېلىپ چىقىدۇ، ئەمما گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ پۈتۈن قىياپىتىنى تەكشىلىكتىكى بىرلا شەكىلگە ئاساسەن ئىگىلەش ئاسان ئەمەس. شۇڭا، كۆپ يۆنىلىشتىن پرويېكسىيىلەش ئېلىپ بارساق، بىر گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ شەكلى ۋە چوڭ ـ كىچىكلىكىنى مۇكەممەل ئىگىلىيەلەيمىز. ئادەتتە ئۈچ خىل تىك پرويېكسىيە تاللىنىلىدۇ، بىر خىلى، يورۇقلۇق نۇرىنى جىسىمنىڭ ئالدىدىن ئارقىغا تىك پرويېكسىيىلەشتىن كېلىپ چىققان پرويېكسىيىلىك كۆرۈنۈش، بۇ خىل پرويېكسىيىلىك كۆرۈنۈش گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ **ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشى** دەپ ئاتىلىدۇ. ئىككىنچى خىلى، يورۇقلۇق نۇرىنى گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ سول تەرىپىدىن ئوڭ تەرىپىگە تىك پرويېكسىيىلەشتىن كېلىپ چىققان پرويېكسىيىلىك كۆرۈنۈش، بۇ خىل پرويېكسىيىلىك كۆرۈنۈش گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ **ياندىن كۆرۈنۈشى** دەپ ئاتىلىدۇ؛ ئۈچىنچى خىلى، يورۇقلۇق نۇرىنى گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈستىدىن ئاستىغا تىك پرويېكسىيىلەشتىن كېلىپ چىققان پرويېكسىيىلىك كۆرۈنۈش، بۇ خىل پرويېكسىيىلىك كۆرۈنۈش گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ **ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى** دەپ ئاتىلىدۇ. گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشى، ياندىن كۆرۈنۈشى ۋە ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى ئومۇملاشتۇرۇلۇپ گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ **ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى** دەپ ئاتىلىدۇ. 4.2.1 ـ رەسىمدە بېرىلگىنى بىر پاراللېلېپىپېدنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىدىن ئىبارەت.

ئومۇمەن، ياندىن كۆرۈنۈشى ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشنىڭ ئوڭ تەرىپىدە، ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشنىڭ ئاستى تەرىپىدە بولىدۇ.



4.2.1 ـ رەسىم

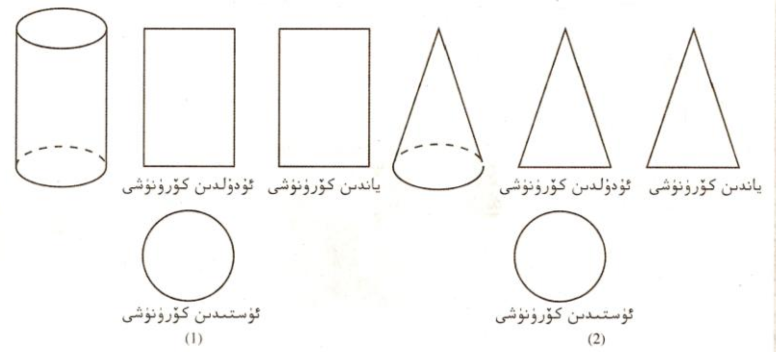
كۆزىتىش

ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشى، ياندىن كۆرۈنۈشى ۋە ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى ئايرىم ـ ئايرىم گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ دەل ئالدى تەرىپىدىن، دەل سول تەرىپىدىن ۋە دەل ئۈستى تەرەپىدىن كۆزىتىلگەندىكى تىك پرويېكسىيە كۆرۈنۈشى بولۇپ، ئۇلارنىڭ ھەممىسى تەكشىلىكتىكى شەكىللەردۇر. پاراللېلېپىپېدنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى كۆزىتىپ، ئوخشاش بىر گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشى، ياندىن كۆرۈنۈشى ۋە ئۈستىدىن كۆرۈنۈشىنىڭ شەكلى، چوڭ ـ كىچىكلىكى جەھەتلەردىكى مۇناسىۋىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

4.2.1 ـ رەسىمدىن بايقاشقا بولىدۇكى، پاراللېلېپىپېدنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنىڭ ھەممىسى تىك تۆتبۇلۇڭ بولۇپ، ئۇنىڭ ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشى بىلەن ياندىن كۆرۈنۈشى، ياندىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى، ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشىنىڭ ھەرقايسىسىدا بىردىن تە رىپى ئۆز ئارا تەڭ بولىدۇ.

ئومۇمەن، بىر گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ياندىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشىنىڭ ئې گىزلىكلىرى تەڭ، ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشىنىڭ ئۇزۇنلۇقلىرى تەڭ، ياندى كۆرۈنۈشى بىلەن ئۈستىدىن كۆرۈنۈشىنىڭ كەڭلىكلىرى تەڭ بولىدۇ.

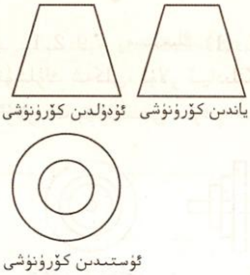
5.2.1 ـ رەسىمنىڭ (1)، (2) لىرى ئايرىم ـ ئايرىم سىلىندىر ۋە كونۇسنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىدۇر.



5.2.1 ـ رەسىم

مۇلاھىزە ؟

6.2.1 ـ رەسىمدە بىر گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بېرىلگەن، سىز ئۇنىڭغا ماس بولغان گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ نامىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟



6.2.1 ـ رەسىم

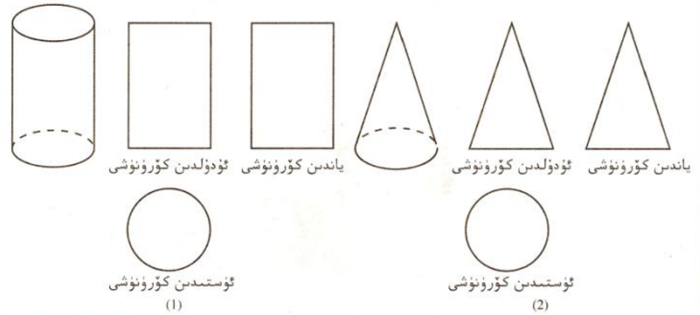
6.2.1 ـ رەسىمدىكى ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىل ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىم كېسىك كونۇس.

گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزغاندا، كۆرگىلى بولىدىغان دائىر سىزىقى ۋە قىرلارنى تۇتاش سىزىق بىلەن، كۆرگىلى بولمايدىغان دائىرە سىزىقى ۋە قىرلارنى ئۈزۈل سىزىق بىلەن ئىپادىلەيمىز.

4.2.1 ـ رەسىمدىن بايقاشقا بولىدۇكى، پاراللېلېپىپېدنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنىڭ ھەممىسى تىك تۆتبۇلۇڭ بولۇپ، ئۇنىڭ ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشى بىلەن ياندىن كۆرۈنۈشى، ياندىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى، ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشىنىڭ ھەرقايسىسىدا بىردىن تەرەپى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ.

ئومۇمەن، بىر گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ياندىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشىنىڭ ئېگىزلىكلىرى تەڭ، ئۈستىدىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشىنىڭ ئۇزۇنلۇقلىرى تەڭ، ياندىن كۆرۈنۈشى بىلەن ئۈستىدىن كۆرۈنۈشىنىڭ كەڭلىكلىرى تەڭ بولىدۇ.

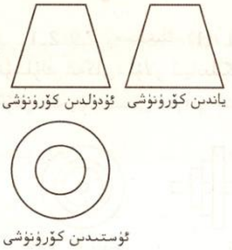
5.2.1 ـ رەسىمنىڭ (1)، (2) لىرى ئايرىم ـ ئايرىم سىلىندىر ۋە كونۇسنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىدۇر.



5.2.1 ـ رەسىم

مۇلاھىزە ؟

6.2.1 ـ رەسىمدە بىر گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بېرىلگەن، سىز ئۇنىڭغا ماس بولغان گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ نامىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟



6.2.1 ـ رەسىم

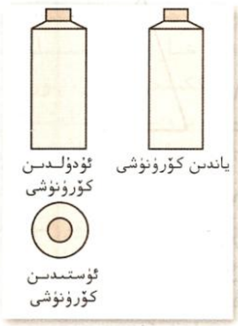
6.2.1 ـ رەسىمدىكى ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىل ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىم كېسىك كونۇس.

گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزغاندا، كۆرگىلى بولىدىغان دائىرە سىزىقى ۋە قىرلارنى تۇتاش سىزىق بىلەن، كۆرگىلى بولمايدىغان دائىرە سىزىقى ۋە قىرلارنى ئۈزۈك سىزىق بىلەن ئىپادىلەيمىز.

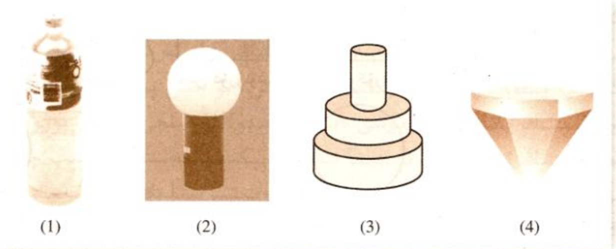
2. ئاددىي بىرىكمە جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى

تۆۋەندىكى جىسىملار ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىملار بەزى ئاددىي گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ بىرىكمىسىدىن ئىبارەت، سىز ئۇلارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىپ چىقالامسىز؟

ئاددىي گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ بىرىكمىسىگە نىسبەتەن، چوقۇم ئەستايىدىل كۆزىتىش، ئالدى بىلەن ئۇنىڭ ئاساسىي قۇرۇلمىسىنى تونۇش، ئاندىن ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىش كېرەك. 7.2.1 ـ رەسىم (1) دىكىسى بىزگە تونۇش بولغان بىر خىل قاچا بولۇپ، ئۇنىڭ ئاساسلىق گېئومېتىرىيىلىك قۇرۇلمىسى يۇقىرىدىن تۆۋەنگە ئايرىم ـ ئايرىم سىلىندىر، كېسىك كونۇس ۋە سىلىندىر. ئۇنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى 8.2.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك. 7.2.1 ـ رەسىم (2)، (3)، (4) لەردىكى جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى ساۋاقداشلار ئۆزلىرى سىزىپ چىقسا بولىدۇ.



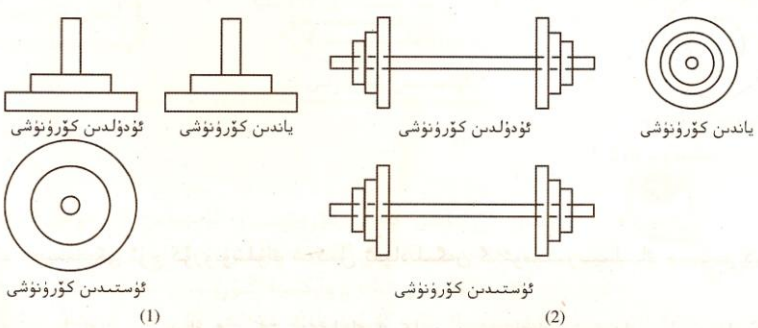
8.2.1 ـ رەسىم



7.2.1 ـ رەسىم

مۇلاھىزە؟

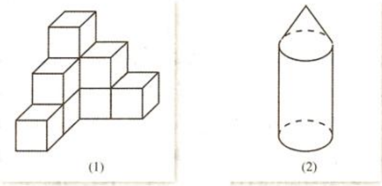
9.2.1 ـ رەسىمنىڭ (1)، (2) لىرى ئايرىم ـ ئايرىم ئىككى ئاددىي بىرىكمە جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى، ئۇلار ئىپادىلىگەن بىرىكمە جىسىمنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ سىخېمىسىنى سىزىپ چىقىڭ (ئۆلچەمگە قاتتىق تەلەپ قويۇلمايدۇ).



9.2.1 ـ رەسىم

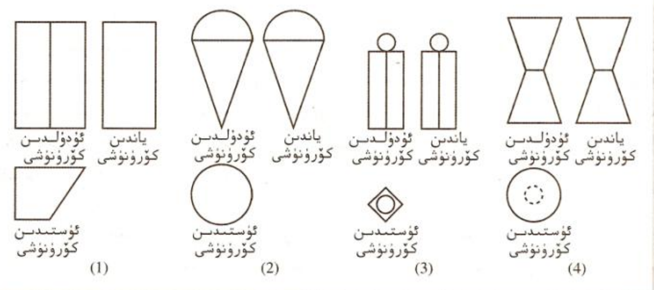
مەشىق

1. تۆۋەندىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ:



(1 - مىسال ئۈچۈن)

2. تۆۋەندىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى كۆزىتىڭ، ئۇلارنىڭ گېئومېتىرىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ ۋە ئېيتىپ بېرىڭ، ئاندىن ئۇلارنىڭ سىخېمىسىنى سىزىپ چىقىڭ:

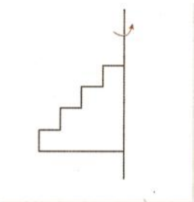


(2 - مىسال ئۈچۈن)

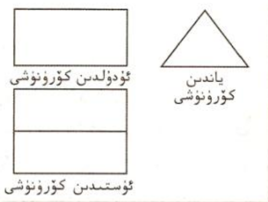
3. تۆۋەندىكى بايانلارغا ئاساسەن، گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ:

(1) ئالتە دانە ياقتىن قورشالغان، ئۇنىڭ ئىچىدىكى بىر يېقى مۇنتىزىم بەش تەرەپلىك، قالغان بەش يېقى ئۆزئارا تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭ بولغان گېئومېتىرىيىلىك جىسىم؛

(2) رەسىمدىكىدەك، تەكشىلىكتىكى بىر شەكىلنى تولۇق بىر قېتىم ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان گېئومېتىرىيىلىك جىسىم.



(3(2) مىسال ئۈچۈن)



(4 - مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكىسى بىر گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى، ئۇنىڭ گېئومېتىرىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ ھەمدە ئۇنىڭ نامىنى ئېيتىپ بېرىڭ.

3-2-1 بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى

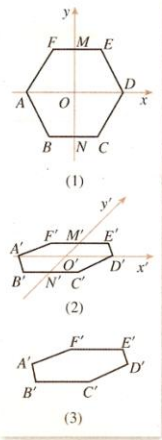
بىز گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىگە نىسبەتەن ناتونۇش ئەمەس. 2.1.1 - رەسىمدىن 10.1.1 - رەسىمگىچە ھەممىسى ماس گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى. ئۇلار قانداق سىزىپ چىقىلغان؟

ستېرېئومېترىيە ئوقۇتۇشىدا، ئادەتتە بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى پاراللېل پرويېكسىيە ئاستىدا سىزىپ چىقىلغان بوشلۇقتىكى شەكىلدىن ئىبارەت.

بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقىش ئۈچۈن، ئالدى بىلەن گورىزونتال قويۇلغان تەكشىلىكتىكى شەكىلنى سىزىش ئۇسۇلىنى ئۆگىنىۋېلىش كېرەك. مەسىلەن، شىرە ئۈستىگە بىر مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىك قويۇلغان، بوشلۇقتىكى مەلۇم نۇقتىدىن بۇ مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىكنى كۆزەتكەن چېغىمىزدا، ئۇنىڭ شەكلى قانداق بولىدۇ؟ ئۇنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى قانداق سىزىش كېرەك؟

تۆۋەندە بىز مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىكنى مىسال قىلىپ، گورىزونتال قويۇلغان تەكشىلىكتىكى شەكىلنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىش ئۇسۇلىنى چۈشەندۈرۈپ ئۆتىمىز. تەكشىلىكتىكى كۆپ تەرەپلىكلەرگە نىسبەتەن، بىز ئادەتتە يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئۇلارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقىمىز. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلى بولسا بىر خىل ئالاھىدە پاراللېل پرويېكسىيە سىزىش ئۇسۇلىدۇر.

1 - مىسال. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ گورىزونتال قويۇلغان مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىكنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزايلى.



10.2.1 - رەسىم

سىزىش ئۇسۇلى: (1) 10.2.1 - رەسىم (1) دىكىدەك، مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىك $ABCDEF$ دا، AD ياتقان تۈز سىزىقنى x ئوق، سىممېترىك ئوقى MN ياتقان تۈز سىزىقنى y ئوق قىلىپ ئالساق، ئىككى ئوق ئۆزئارا O نۇقتىدا كېسىشىدۇ. 10.2.1 - رەسىم (2) دە، ماس ھالدا $\angle x'O'y' = 45°$ بولىدىغان قىلىپ x'، y' ئوقلارنى سىزساق، ئىككى ئوق ئۆزئارا O' نۇقتىدا كېسىشىدۇ.

(2) 10.2.1 - رەسىم (2) دە، O' نى ئوتتۇرا نۇقتا قىلىپ، x' ئوقنىڭ ئۈستىدىن $A'D' = AD$ نى، y' ئوقنىڭ ئۈستىدىن $M'N' = \frac{1}{2}MN$ نى ئالىمىز. N' نى ئوتتۇرا نۇقتا قىلىپ، x' ئوققا پاراللېل ھەمدە BC غا تەڭ بولغان $B'C'$ نى سىزىمىز؛ ئاندىن M' نى ئوتتۇرا نۇقتا قىلىپ، x' ئوققا پاراللېل ھەمدە EF قا تەڭ بولغان $E'F'$ نى سىزىمىز.

(3) A' بىلەن B'، C' بىلەن D'، D' بىلەن E'، F' بىلەن A' نى تۇتاشتۇرساق ھەمدە ياردەمچى سىزىق x' ئوق ۋە y' ئوقلارنى ئۆچۈرۈۋەتسەك، گورىزونتال قويۇلغان مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىك $ABCDEF$ نىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى $A'B'C'D'E'F'$ گە ئىگە بولىمىز (10.2.1 - رەسىم (3) دىكىدەك).

يۇقىرىدا بايان قىلىنغان كۆرسەتمىلىك شەكىلنى سىزىش ئۇسۇلى **يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلى** دېيىلىدۇ، ئۇنىڭ قەدەم باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىدەك:

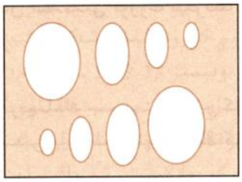
(1) بېرىلگەن شەكىل ئۈستىدىن O نۇقتىدا ئۆزئارا تىك كېسىشىدىغان x، y ئوقلارنى ئالىمىز. كۆرسەتمىلىك شەكىلنى سىزغاندا، ئۇلارغا ماس هالدا $\angle x'O'y'=45°$ (ياكى $\angle x'O'y'=135°$) بولىدىغان قىلىپ، O' نۇقتىدا كېسىشىدىغان x'، y' ئوقلارنى سىزىمىز، ئۇلار بەلگىلىگەن تەكشىلىك گورىزونتال تەكشىلىكنى ئىپادىلەيدۇ.

(2) بېرىلگەن شەكىلدىكى x ئوق ياكى y ئوققا پاراللېل بولغان كېسىكلەرنى كۆرسەتمىلىك شەكىلدە ئايرىم ـ ئايرىم هالدا x' ئوق ياكى y' ئوققا پاراللېل بولغان كېسىك قىلىپ سىزىمىز.

(3) بېرىلگەن شەكىلدىكى x ئوققا پاراللېل بولغان كېسىكلەرنىڭ ئۇزۇنلۇقى كۆرسەتمىلىك شەكىلدە ئۆزگەرمەيدۇ، y ئوققا پاراللېل بولغان كېسىكلەرنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئەسلىدىكىنىڭ يېرىمىغا تەڭ قىلىپ ئالىمىز.

تۇرمۇش تەجرىبىلىرى بىزگە شۇنى ئېيتىپ بېرىدۇكى، گورىزونتال قويۇلغان چەمبەر قارىماققا ئېللىپسقا ناهايىتى ئوخشاپ كېتىدۇ. ئەمەلىيەتتە گورىزونتال قويۇلغان چەمبەرنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىشتا، بىز دائىم 11.2.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەن ئېللىپس مودېلى تاختىسىنى ئىشلىتىمىز.

گورىزونتال قويۇلغان چەمبەرنى سىزىشتا، ستېرېئومېترىيىدە هەمىشە تىك تەڭ ئوقلار بويىچە سىزىش ئۇسۇلى قوللىنىلىدۇ.

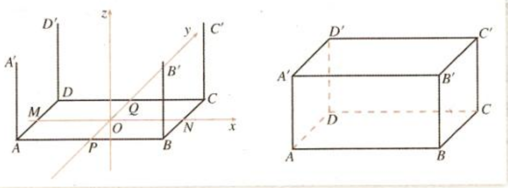


11.2.1 ـ رەسىم

تۆۋەندە بىز بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىش ئۇسۇلى ئۈستىدە ئىزدىنىمىز.

2 ـ مىسال. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئۇزۇنلۇق، كەڭلىك، ئېگىزلىكلىرى ئايرىم ـ ئايرىم 4 cm، 3 cm، 2 cm بولغان پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ نىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزايلى.

سىزىش ئۇسۇلى: (1) ئوقلارنى سىزىش. 12.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك، $\angle xOy=45°$، $\angle xOz=90°$ بولىدىغان قىلىپ، x ئوق، y ئوق، z ئوقلارنى سىزساق، بۇ ئۈچ ئوق ئۆزئارا O نۇقتىدا كېسىشىدۇ.



12.2.1 ـ رەسىم

گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزغاندا، ئەگەر قاتتىق تەلەپ قويۇلمىسا، شەكىلنىڭ ئۆلچىمىنى مۇۋاپىق تاللىسا بولىدۇ. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ شەكىل سىزغاندا بۇلۇڭنى ئۆزى بېكىتسە بولىدۇ، ئەمما شەكىلنىڭ ستېرېئولۇقا ئىگە بولۇشى تەلەپ قىلىنىدۇ.

(2) ئاساسلىرىنى سىزىش. O نۇقتىنى ئوتتۇرا نۇقتا قىلىپ، x ئوق ئۈستىدىن $MN = 4\text{ cm}$ بولىدىغان قىلىپ MN كېسىكنى ئالىمىز؛ y ئوق ئۈستىدىن $PQ = \frac{3}{2}\text{ cm}$ بولىدىغان قىلىپ PQ كېسىكنى ئالىمىز. ئايرىم ـ ئايرىم M، N نۇقتىلار ئارقىلىق y ئوققا پاراللېل سىزىقلارنى، P، Q نۇقتىلار ئارقىلىق x ئوققا پاراللېل سىزىقلارنى ئۆتكۈزۈپ، ئۇلارنىڭ كېسىشىش نۇقتىلىرىنى ئايرىم ـ ئايرىم A، B، C، D دەپ پەرەز قىلساق، تۆت تەرەپلىك $ABCD$ دەل پاراللېلېپىپېدنىڭ ئاساسى $ABCD$ بولىدۇ.

(3) يان قىرلىرىنى سىزىش. A، B، C، D نۇقتىلار ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم z ئوقىنىڭ پاراللېل سىزىقلىرىنى ئۆتكۈزىمىز ھەمدە بۇ پاراللېل سىزىقلار ئۈستىدىن ئايرىم ـ ئايرىم ئۇزۇنلۇقى 2 cm بولغان AA'، BB'، CC'، DD' كېسىكلەرنى ئالىمىز.

(4) شەكىلنى ھاسىل قىلىش. تەرتىپ بويىچە A'، B'، C'، D' لارنى تۇتاشتۇرۇپ ھەم رەتلىسەك (ياردەمچى سىزىقلارنى ئۆچۈرۈۋېتىپ، توسۇۋېلىنغان قىسمىنى ئۈزۈك سىزىققا ئۆزگەرتىمىز)، پاراللېلېپىپېدنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىگە ئىگە بولىمىز.

3 ـ مىسال. 13.2.1 ـ رەسىمدە گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بېرىلگەن، يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئۇنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزايلى.

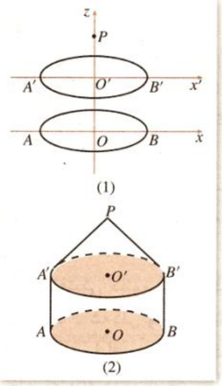
تەھلىل: گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىدىن بىلىۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ گېئومېترىيىلىك جىسىم بىر ئاددىي بىرىكمە جىسىمدىن ئىبارەت. ئۇنىڭ ئاستىنقى قىسمى بىر سىلىندىر، ئۈستۈنكى قىسمى بىر كونۇس ھەمدە كونۇسنىڭ ئاساسى بىلەن سىلىندىرنىڭ ئۈستۈنكى ئاساسى ئۈستمۇئۈست چۈشكەن. بىز ئالدى بىلەن ئاستىنقى قىسىمدىكى سىلىندىرنى، ئاندىن ئۈستۈنكى قىسىمدىكى كونۇسنى سىزىمىز.

سىزىش ئۇسۇلى: (1) ئوقلارنى سىزىش. 14.2.1 ـ رەسىم (1) دىكىدەك، $\angle xOz = 90^\circ$ بولىدىغان قىلىپ x ئوق، z ئوقلارنى سىزىمىز.

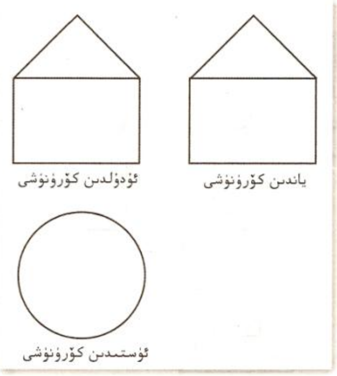
(2) سىلىندىرنىڭ ئاستىنقى ئاساسىنى سىزىش. x ئوقىنىڭ ئۈستىدىن AB نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئۈستىدىن كۆرۈنۈشىدىكى چەمبەرنىڭ دىئامېترىغا تەڭ ھەمدە $OA = OB$ بولىدىغان قىلىپ A، B ئىككى نۇقتىنى ئالىمىز. ئېللىپس مودېلى تاختىسىدىن A، B ئىككى نۇقتىدىن ئۆتىدىغان، مۇۋاپىق ئېللىپسنى تاللاپ ئۇنى سىلىندىرنىڭ ئاستىنقى ئاساسى قىلىمىز.

(3) Oz نىڭ ئۈستىدىن OO' نىڭ ئۇزۇنلۇقى ئۇدۇلدىن كۆرۈنۈشىدىكى OO' نىڭ ئۇزۇنلۇقىغا تەڭ بولىدىغان قىلىپ O' نۇقتىنى ئالىمىز، O' نۇقتا ئارقىلىق Ox ئوققا پاراللېل قىلىپ $O'x'$ ئوقنى ئۆتكۈزۈپ، سىلىندىرنىڭ ئاستىنقى ئاساسىنى سىزىش ئۇسۇلى بويىچە ئۈستۈنكى ئاساسىنى سىزىمىز.

(4) كونۇسنىڭ چوققىسىنى سىزىش. Oz نىڭ ئۈستىدىن PO' نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئۇدۇلدىن كۆرۈ-



14.2.1 ـ رەسىم



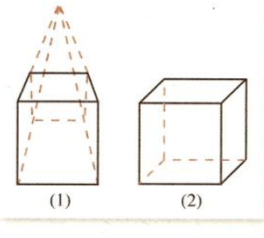
13.2.1 ـ رەسىم

نۇشىدىكى ماس ئېگىزلىككە تەڭ بولىدىغان قىلىپ P نۇقتىنى ئالىمىز.

(5) شەكىلنى هاسىل قىلىش. P بىلەن A' نى، P بىلەن B' نى، A بىلەن A' نى، B بىلەن B' نى تۇتاشتۇرۇپ رەتلىسەك، ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىل ئىپادىلىگەن گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىگە ئىگە بولىمىز (14.2.1 ـ رەسىم(2)).

بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بىلەن كۆرسەتمىلىك شەكلى زىچ مۇناسىۋەتلىك، بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىدىن ئۇنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىگە ئىگە بولالايمىز. شۇنىڭ بىلەن بىللە، بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىدىن ئۇنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىگە ئىگە بولالايمىز.

پرويېكسىيە نۇقتىسىدىن قارىغاندا، ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىل ۋە يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ سىزىپ چىقىلغان كۆرسەتمىلىك شەكىل ئوخشاشلا پاراللېل پرويېكسىيە بىلەن سىزىپ چىقىلغان بوشلۇقتىكى شەكىلدىن ئىبارەت. مەركىزىي پرويېكسىيە بىلەنمۇ بوشلۇقتىكى شەكىللەرنى سىزىپ چىققىلى بولىدۇ. 15.2.1 ـ رەسىم (1) بولسا مەركىزىي پرويېكسىيە بىلەن سىزىپ چىقىلغان كۇبنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىدىن ئىبارەت، ئۇنىڭ بىلەن پاراللېل پرويېكسىيىدىن هاسىل بولغان كۇبنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى(15.2.1 ـ رەسىم (2)) ئارىسىدا قانداق باغلىنىش ۋە پەرق بار؟



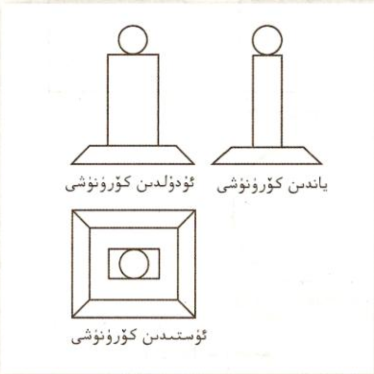
15.2.1 ـ رەسىم

بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملار پاراللېل پرويېكسىيە ۋە مەركىزىي پرويېكسىيە ئاستىدا ئوخشىمىغان ئىپادىلىنىش شەكلىگە ئىگە، مەسىلىلەرنىڭ ئەمەلىي ئەھۋالىغا ئاساسەن، ئوخشىمىغان ئىپادىلەش ئۇسۇللىرىنى تاللىۋالساق بولىدۇ.

ئىزدىنىش

(1) 16.2.1 - رەسىمدە بىر مۇكاپات لوڭقىسىنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بېرىلگەن، سىز ئۇنىڭ گېئومېتىرىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى تەسەۋۋۇر قىلالامسىز ھەمدە ئۇنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقالامسىز؟

(2) بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلى بىزنىڭ گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ قۇرۇلمىسىنى ئوخشىمىغان تەرەپلەردىن، ئوخشىمىغان نۇقتىلاردىن تونۇشىمىزغا ياردەم بېرىدۇ، ئۇلارنىڭ ھەرقايسىسىنىڭ قانداق ئالاھىدىلىكلىرى بار؟ بۇ ئىككىسىنىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟



16.2.1 - رەسىم

مەشىق

1. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكى گورىزونتال قويۇلغان تەكشىلىكتىكى شەكىللەرنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىڭ (ئۆلچىمىنى ئۆزىڭىز بېكىتىڭ):

(1) خالىغان ئۈچبۇلۇڭ؛ (2) پاراللېل تۆت تەرەپلىك؛

(3) مۇنتىزىم سەككىز تەرەپلىك.

2. تۆۋەندىكى يەكۈنلەرنىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ، توغرا بولسا «✓» بەلگىسىنى، خاتا بولسا «✗» بەلگىسىنى قويۇڭ.

(1) بۇلۇڭنىڭ گورىزونتال قويۇلغان كۆرسەتمىلىك شەكلى چوقۇم بۇلۇڭ بولىدۇ. ( )

(2) ئۆزئارا تەڭ بۇلۇڭلار كۆرسەتمىلىك شەكىلدە يەنىلا ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ. ( )

(3) ئۆزئارا تەڭ كېسىكلەر كۆرسەتمىلىك شەكىلدە يەنىلا ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ. ( )

(4) ئەگەر ئىككى كېسىك ئۆزئارا پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا كۆرسەتمىلىك شەكىلدە ئۇلارغا ماس ئىككى كېسىكمۇ يەنىلا ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ. ( )

3. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يەكۈنلەر:

① ئۈچبۇلۇڭنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ.

② پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولىدۇ.

③ كۋادراتنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى كۋادرات بولىدۇ.

④ رومبىنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى رومبا بولىدۇ.

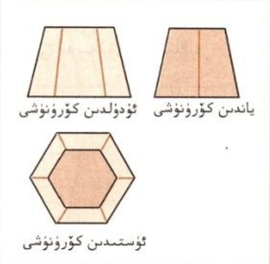
يۇقىرىدىكى يەكۈنلەر ئىچىدە توغرا بولغىنى ( )

A. ①② B. ① C. ③④ D. ①②③④

4. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ بەش قىرلىق پىرامىدا $P-ABCDE$ نىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىڭ، بۇنىڭدا ئاساسى $ABCDE$ مۇنتىزىم بەش تەرەپلىك، P نۇقتىنىڭ ئاساسىدىكى پرو-

يېكسىيسى مۇنتىزىم بەش تەرەپلىكنىڭ مەركىزى O بولىدۇ (ئۆلچىمىنى ئۆزىڭىز بېكىتىڭ).

5. سول تەرەپتىكى رەسىمدە بوشلۇقتىكى بىر گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بېرىلگەن، يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئۇنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىڭ.

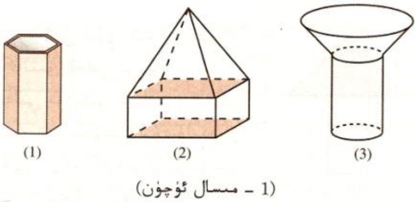


(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

2.1 ـ كۆنۈكمە

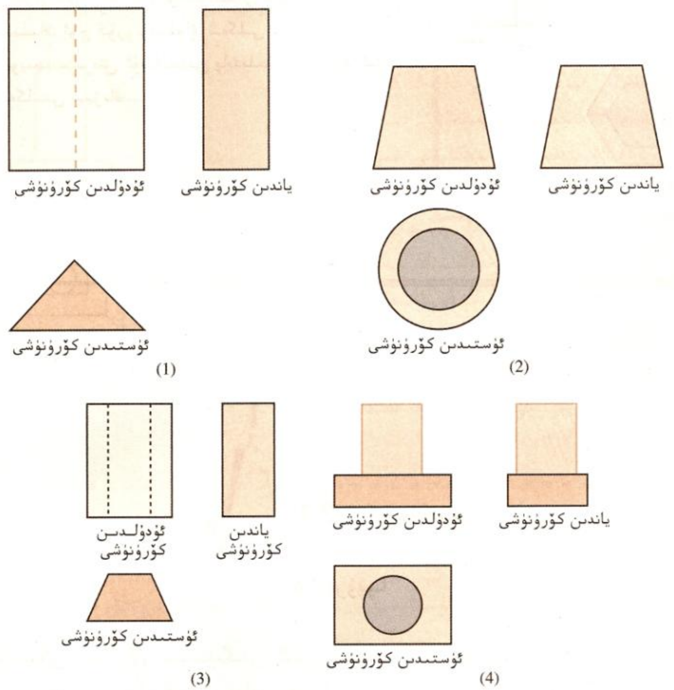
A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى جىسىملار ئىپادىلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىڭ (ئۆلچەمگە قاتتىق تەلەپ قويۇلمايدۇ):



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. تۆۋەندىكى ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىللەرگە ئاساسەن، ئۇلارغا ماس گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ:

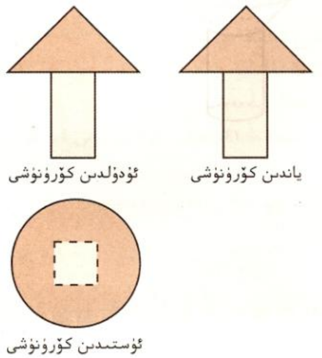


(2 ـ مەسىلە ئۈچۈن)

3. 2 ـ مەسىلىدە بېرىلگەن ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىللەرگە ئاساسەن، قاتتىق قەغەزدىن پايدىلىنىپ ئۇلارغا ماس بولغان ئەمەلىي مودېلنى ياساپ چىقىڭ.

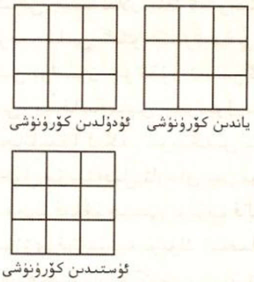
4. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ، بىر بۇلۇڭى 60°، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 4 cm بولغان گورىزونتال قويۇلغان رومبىنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىڭ.

5. رەسىمدىكىدەك، گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بېرىلگەن، ئۇنىڭغا ماس بولغان گېئومېتىرىيىلىك جىسىمنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ ھەمدە ئۇنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىڭ.



(5 ـ مەسىلە ئۈچۈن)

B گۇرۇپپا



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. مەكتىپىڭىزدىكى بىر بىنانىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ (ئۆلچەم، سىزىقلارغا قاتتىق تەلەپ قويۇلمايدۇ).

2. ئۆگەنگەن گېئومېترىيىلىك جىسىملاردىن پايدىلىنىپ، بىر ئۆگىنىش قورالىنى لايىھىلەڭ ھەمدە گۇرۇپپىدا ئۆزىڭىزنىڭ لايىھىسىنى چۈشەندۈرۈڭ.

3. رەسىمدە بىر ئاددىي بىرىكمە جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بېرىلگەن، ئۇ ئىپادىلىگەن بىرىكمە جىسىمنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ ھەمدە ئۇنىڭ سىخېمىسىنى سىزىپ چىقىڭ (ئۆلچەمگە قاتتىق تەلەپ قويۇلمايدۇ).

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

سىزمىچىلىق گېئومېترىيىسى ۋە مونژې

سىزمىچىلىق گېئومېترىيىسى دېگىنىمىز تەكشىلىكتە بوشلۇقتىكى شەكىللەرنى سىزىش ھەمدە تەكشىلىكتە بوشلۇقتىكى ئەسلىي جىسىملارنىڭ ھەرقايسى بۆلەكلىرىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى، ئورنىنى ھەمدە ئۆزئارا مۇناسىۋىتىنى ئىپادىلەيدىغان بىر پەندىن ئىبارەت. ئۇ رەسىم سىزىش، بىناكارلىق قاتارلىق تەرەپلەردە كەڭ قوللىنىشچانلىققا ئىگە.

سىزمىچىلىق گېئومېترىيىسى ياۋروپا مەدەنىيىتى قايتا گۈللەنگەن دەۋردىكى رەسىم سىزىش ۋە بىناكارلىق تېخنىكىسىدىن كېلىپ چىققان. ئىتالىيىلىك سەنئەتكار داۋىنچى (Leonardo da Vinci، 1452 ~ 1519 ـ يىللار) ئۆزىنىڭ سىزغان ئەسەرلىرىدە پېرسپېكتىۋ (ئوچۇق كۆرۈنىدىغان) نەزەرىيىسى، ئاساسلىقى مەركىزىي پروييېكسىيە ئۇسۇلىنى كەڭ قوللانغان. فرانسىيە ماتېماتىكى دېسارگې (Desarque، 1593 ~ 1662 ـ يىللار) ئۆزىنىڭ «پېرسپېكتىۋ ئۇسۇلى» دا بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ پېرسپېكتىۋ شەكلىنى سىزىش ئۇسۇلى ھەمدە تەكشىلىكتىكى شەكىللەردىن گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۆلچىمىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى قانداق توغرا ھېسابلاش ئۇسۇلىنى تونۇشتۇرغان، بۇنىڭدا ئاساسلىقى تىك پروييېكسىيە ئۇسۇلى قوللىنىلغان. كېيىن فرانسىيە ماتېماتىكى مونژې (Monge، 1745 ~ 1818 ـ يىللار) تېخىمۇ چوڭقۇرلاپ تەتقىقات ئېلىپ بارغان ھەمدە 1799 ـ يىلى «سىزمىچىلىق گېئومېترىيىسى» دېگەن ئەسەرنى نەشر قىلدۇرغان. بۇ ئەسەردە مونژې بىرىنچى

بولۇپ بوشلۇقتىكى (ئۈچ ئۆلچەملىك) جىسىمنى ئۆزئارا تىك بولغان ئىككى تەكشىلىككە قانداق پرويېكسىيىلەشنى تەپسىلىي بايان قىلغان ھەمدە پرويېكسىيە پرىنسىپىغا ئاساسەن (بۇ پرىنسىپ كېيىن تەرەققىي قىلىپ پرويېكسىيە گېئومېتىرىيىسىنى شەكىللەندۈردى) بۇ بوشلۇقتىكى جىسىملارنىڭ گېئومېتىرىيىلىك خۇسۇسىيىتىنى كەلتۈرۈپ چىقارغان. مونژېنىڭ «سىزمىچىلىق گېئومېتىرىيىسى» دېگەن ئەسىرى مەيلى ئۇقۇم جەھەتتىن ياكى ئۇسۇل جەھەتتىن بولسۇن چوڭقۇر تەسىرگە ئىگە. بۇ خىل ئۇسۇل بىناكارلىق ئىلمى، ھەربىي ئىشلار ئىلمى، مېخانىكىلىق چېرتيوژ سىزىش قاتارلىق جەھەتلەردە ئىنتايىن چوڭ ئەمەلىي قوللىنىشچانلىققا ئىگە، شۇنىڭدىن باشلاپ سىزمىچىلىق گېئومېتىرىيىسى گېئومېتىرىيىدىكى بىر خىل مۇستەقىل تارماق پەن بولۇپ شەكىللەندى، مونژې سىزمىچىلىق گېئومېتىرىيىسىنىڭ بەرپا قىلغۇچىسى بولۇپ قالدى.

مونژې فرانسىيە بۈيۈك ئىنقىلابى دەۋرىدە ئۆسۈپ يېتىلگەن، ئۇ دېڭىز ئارمىيە مىنىستىرى بولغان ھەمدە پارىژ كۆپ پەنلەر تېخنولوگىيە مەكتىپىنى قۇرغان. ئۇ دېلون ئەتراپىدىكى بىر كىچىك سودىگەر ئائىلىسىدە تۇغۇلغان، 16 يېشىدا لىئون ئىنستىتۇتىدا لېكتور بولغان، ئۇ ماسشتاب بويىچە ئۆز يۇرتىنىڭ خەرىتىسىنى سىزىپ چىققان، شۇ سەۋەبلىك ئۇ مېئېر (mier) ھەربىي ئىشلار ئىنستىتۇتىغا چېرتيوژچى بولۇپ تەكلىپ قىلىنغان. 1768 ـ يىلى، مونژې بۇ مەكتەپتە ماتېماتىكا پروفېسسورى بولغان، بۇ چاغدا ئۇ ئەمدىلا 23 ياشقا كىرگەنىدى. 1780 ـ يىلى، ئۇ پارىژ پەنلەر ئاكادېمىيىسىنىڭ ئاكادېمىكلىكىگە تەيىنلىنىپ، كېيىن يەنە دېڭىز ئارمىيە مەكتىپىدە ئوقۇتقۇچىلىق قىلغان. سانلىق مەلۇماتلار ئىچىدىن قورغاندىكى توپچى قىسىملار بازىسىنىڭ ئورنىنى ھېسابلاپ چىقىش ئۈچۈن، مونژې گېئومېتىرىيىلىك ئۇسۇلنى قوللىنىپ مۇرەككەپ ھېسابلاشلاردىن ساقلانغان، ئۇ ئىككى ئۆلچەملىك تەكشىلىكتىكى مۇۋاپىق پرويېكسىيە ئارقىلىق ئۈچ ئۆلچەملىك جىسىمنى ئىپادىلەشتىن ئىبارەت ئەپچىل ئۇسۇلنى كەشىپ قىلغان، بۇ ئۇسۇل ئەمەلىيەت جەريانىدا كەڭ قوللىنىلغان ھەمدە سىزمىچىلىق گېئومېتىرىيىسىنىڭ مەيدانغا كېلىشىگە سەۋەب بولغان. فرانسىيە بۈيۈك ئىنقىلابىنىڭ ئالدى ـ كەينىدە، ھەربىي ئىشلار بىناكارلىقىنىڭ جىددىي ئېھتىياجى تۈپەيلىدىن، مونژېنىڭ سىزمىچىلىق گېئومېتىرىيە ئۇسۇلى ھەربىي ئىشلار مەخپىيەتلىكى قاتارىغا كىرگۈزۈلۈپ، ئۇزاققىچە دۇنياغا ئاشكارا قىلىنمىغان، شۇ چاغدىكى ھەربىي ئىشلار چەكلىمىسى ئەمەلدىن قالدۇرۇلغاندىن كېيىن، مونژې ئاندىن ئۆزىنىڭ تەتقىقات نەتىجىلىرىنى ئېلان قىلغان، بۇ ئۇنىڭ سىزمىچىلىق گېئومېتىرىيىسىنى ئىجاد قىلغاندىن 30 يىل كېيىنكى ئىش ئىدى.

3-1 بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملار-نىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمى

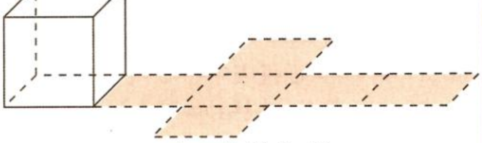
ئالدىنقى پاراگرافلاردا بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى گېئومېترىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكى ۋە كۆرۈنۈشتىن ئىبارەت ئىككى جەھەتتىن تونۇپ ئۆتتۇق. تۆۋەندە بوشلۇقتىكى گېئو-مېترىيىلىك جىسىملارنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمى بىلەن تونۇشىمىز. سىرتقى يۈز دېگىنىمىز گې-ئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ سىرتقى يۈزى بولۇپ، ئۇ گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ سىرتقى يۈزىنىڭ چوڭ - كىچىكلىكىنى، ھەجمى بولسا گېئومېترىيىلىك جىسىم ئىگىلىگەن بوشلۇقنىڭ چوڭ - كى-چىكلىكىنى ئىپادىلەيدۇ.

1-3-1 تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىملارنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمى

1. تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىملارنىڭ سىرتقى يۈزى

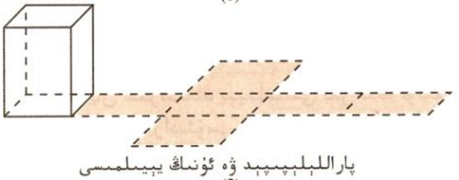
مۇلاھىزە ?

تولۇقسىز ئوتتۇردا، بىز كۇب ۋە پاراللېلېپىپېدلارنىڭ سىرتقى يۈزىنى ھەممە ئۇلارنىڭ يېيىلمىسىنى (1.3.1 - رەسىم) ئۆگەنگەن، سىز يۇقىرىدىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ يېيىلمىسى ۋە ئۇنىڭ سىرتقى يۈزىنىڭ مۇناسىۋىتىنى بىلەمسىز؟



كۇب ۋە ئۇنىڭ يېيىلمىسى

(1)



پاراللېلېپىپېد ۋە ئۇنىڭ يېيىلمىسى

(2)

1.3.1 - رەسىم

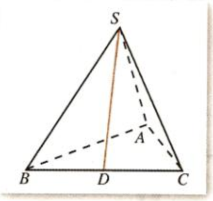
كۇب، پاراللېلېپىپېدلار كۆپلىگەن تەكشىلىكتىكى شەكىللەرنىڭ قورشىشىدىن ھاسىل بولغان كۆپ ياقلىقلار بولۇپ، ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزى ھەرقايسى ياقلارنىڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسىغا، يەنى يېيىلمىسىنىڭ يۈزىگە تەڭ.

ئومۇمەن، كۆپ ياقلىقلارنى يېيىپ تەكشىلىكتىكى شەكىللەرگە ئايلاندۇرۇۋېلىپ، تەكشىلىكتىكى شەكىللەرنىڭ يۈزىنى تېپىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ، كۆپ ياقلىقلارنىڭ سىرتقى يۈزىنى تاپىمىز.

ئىزدىنىش

پىرىزما، پىرامىدا، كېسىك پىرامىدالارمۇ كۆپلىگەن تەكشىلىكتىكى شەكىللەرنىڭ قورشىشىدىن ھاسىل بولغان كۆپ ياقلىقلاردۇر، ئۇلارنىڭ يېيىلمىسى نېمە؟ ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزىنى قانداق ھېسابلاش كېرەك؟

1 ـ مىسال. قىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى a، ھەرقايسى ياقلىرى ئوخشاشلا تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ بولغان تۆت ياقلىق $S-ABC$ (2.3.1 ـ رەسىم) بېرىلگەن، ئۇنىڭ سىرتقى يۈزىنى تاپايلى.



2.3.1 ـ رەسىم

تەھلىل: تۆت ياقلىق $S-ABC$ نىڭ تۆت يېقى ئۆزئارا تەڭ بولغان تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ بولغانلىقتىن، بۇ تۆت ياقلىقنىڭ سىرتقى يۈزى خالىغان بىر يېقىنىڭ يۈزىنىڭ 4 ھەسسىسىگە تەڭ.

يېشىش: ئالدى بىلەن $\triangle SBC$ نىڭ يۈزىنى تاپىمىز، S نۇقتا ئارقىلىق $SD\perp BC$ نى ئۆتكۈزسەك، ئۇ BC بىلەن D نۇقتىدا كېسىشىدۇ.

چۈنكى $BC=a$،

$$SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

شۇڭا

$$S_{\triangle SBC}=\frac{1}{2}BC\cdot SD=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

شۇڭا، تۆت ياقلىق $S-ABC$ نىڭ سىرتقى يۈزى:

$$S=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}\,a^2.$$

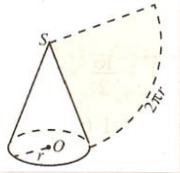
مۇلاھىزە

سىلىندىر، كونۇسلارنىڭ گېئومېترىيىلىك قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزىنى قانداق تېپىشقا بولىدۇ؟

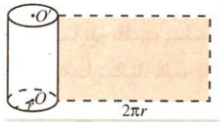
بىزگە مەلۇمكى، سىلىندىرنىڭ يان سىرتىنىڭ يېيىلمىسى بىر تىك تۆتبۇلۇڭدىن ئىبارەت (3.3.1 ـ رەسىم). ئەگەر سىلىندىرنىڭ ئاساسىنىڭ رادىئۇسى r، ياسىغۇچىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى l بولسا، ئۇ ھالدا سىلىندىرنىڭ ئاساسىنىڭ يۈزى πr^2، يان سىرتىنىڭ يۈزى $2\pi rl$ بولىدۇ. شۇڭا، سىلىندىرنىڭ سىرتقى يۈزى

$$S=2\pi r^2+2\pi rl=2\pi r(r+l).$$

ستېرېئومېترىيە مەسىلىلىرىنى ھەل قىلىشتىكى ئەڭ ئاساسلىق، دائىم قوللىنىلىدىغان ئۇسۇل بولسا بوشلۇقتىكى شەكىللەرگە دائىر مەسىلىنى تەكشىلىكتىكى شەكىللەرگە دائىر مەسىلىگە ئايلاندۇرۇشتىن ئىبارەت.



4.3.1 ـ رەسىم



3.3.1 ـ رەسىم

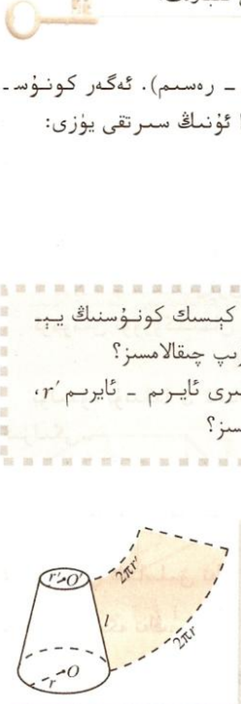
كونۇسنىڭ يان سىرتىنىڭ يېيىلمىسى بىر سېكتوردىن ئىبارەت (4.3.1 ـ رەسىم). ئەگەر كونۇسنىڭ ئاساسىنىڭ رادىئۇسى r، ياسىغۇچىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى l بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ سىرتقى يۈزى:

$$S=\pi r^2+\pi rl=\pi r(r+l).$$

ئىزدىنىش

(1) سىلىندىر ۋە كونۇسنىڭ يېيىلمىسىغا بىرلەشتۈرۈپ، كېسىك كونۇسنىڭ يېيىلمىسىنىڭ شەكلىنى تەسەۋۋۇر قىلالامسىز ھەمدە ئۇنى سىزىپ چىقالامسىز؟

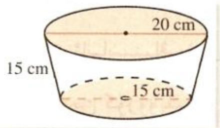
(2) ئەگەر كېسىك كونۇسنىڭ ئۈستۈنكى، ئاستىنقى ئاساسلىرىنىڭ رادىئۇسلىرى ئايرىم ـ ئايرىم r'، r، ياسىغۇچىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى l بولسا، ئۇنىڭ سىرتقى يۈزىنى ھېسابلاپ چىقالامسىز؟



5.3.1 ـ رەسىم

كېسىك كونۇسنىڭ يان سىرتىنىڭ يېيىلمىسى سېكتورسىمان ھالقا بولىدۇ (5.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك)، ئۇنىڭ سىرتقى يۈزى ئۈستۈنكى، ئاستىنقى ئاساسلىرىنىڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسىغا يان سىرتىنىڭ يۈزىنى قوشقانغا تەڭ، يەنى

$$S=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl).$$



6.3.1 ـ رەسىم

2 ـ مىسال. 6.3.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، كېسىك كونۇس شەكىللىك بىر گۈل تەشتىكىنىڭ ئېغىزىنىڭ دىئامېترى 20 cm، ئاساسىنىڭ دىئامېترى 15 cm، ئاساسىدىكى سۇ ئۆتىدىغان تۆشۈكنىڭ دىئامېترى 1.5 cm، تەشتەك يېنىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 15 cm ئىكەنلىكى بېرىلگەن. بۇ تەشتەكنىڭ سىرتىنى تېخىمۇ چىرايلىق بېزەش ئۈچۈن ئۇنى سىرلاشقا توغرا كەلدى. ھەربىر كۋادرات مېتىرغا 100 مىللىلىتر سىر كېتىدىغانلىقى مەلۇم بولسا، مۇشۇنداق تەشتەكتىن 100 نى سىرلاشقا قانچىلىك سىر كېتىدۇ؟ (π نىڭ قىممىتى 3.14، نەتىجە 1 مىللىلىترغىچە ئېنىقلىقتا ئېلىنىدۇ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىشقا بولىدۇ)

تەھلىل: پەقەت ھەربىر تەشتەكنىڭ سىرتقى يۈزىنى تاپساقلا، كېتىدىغان سىرنىڭ مىقدارىنى ھېسابلاپ چىقارغىلى بولىدۇ. تەشتەكنىڭ سىرتقى يۈزى بولسا يان سىرتىنىڭ يۈزى بىلەن ئاساسىنىڭ يۈزىنىڭ يىغىندىسىدىن ئاساسىدىكى سۇ ئۆتىدىغان تۆشۈكنىڭ يۈزىنى ئېلىۋەتكەنگە تەڭ.

يېشىش: 6.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك، كېسىك كونۇسنىڭ سىرتقى يۈزىنى تېپىش فورمۇلىسىدىن بىر تەشتەكنىڭ سىرتقى يۈزىنى تېپىپ چىقالايمىز.

$$S = \pi \times \left[\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \times 15 + \frac{20}{2} \times 15\right] - \pi \times \left(\frac{1.5}{2}\right)^2$$

$$\approx 1000(\mathrm{cm}^2) = 0.1\ (\mathrm{m}^2).$$

100 تەشتەكنى سىرلاشقا كېتىدىغان سىر:

$0.1 \times 100 \times 100 = 1000$ (مىللىلىتىر).

جاۋابى: بۇنداق تەشتەكتىن 100 نى سىرلاش ئۈچۈن تەخمىنەن 1000 مىللىلىتىر سىر كېتىدۇ.

2. تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم ۋە كەسمە جىسىملارنىڭ ھەجمى

بىز ئالاھىدە پرىزما — كۇب، پاراللېلېپىپېد ۋە سىلىندىرنىڭ ھەجمىنى تېپىش فورمۇلىسىنى ئۆگىنىپ ئۆتكەن. ئۇلارنىڭ ھەجىم فورمۇلىسىنى ئومۇملاشتۇرۇپ تۆۋەندىكىدەك يېزىشقا بولىدۇ:

پىرىزما (سىلىندىر) نىڭ ئېگىزلىكى بولسا ئىككى ئاساسى ئارىسىدىكى ئارىلىقنى، يەنى ئۇنىڭ بىر ئاساسىدىن خالىغان بىر نۇقتىنى ئېلىپ يەنە بىر ئاساسىغا تىك سىزىق ئۆتكۈزسەك، بۇ نۇقتا بىلەن تىك ئاساسى (تىك سىزىق بىلەن ئاساسىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى) ئارىسىدىكى ئارىلىقتىن ئىبارەت.

$V = Sh$ (ئېگىزلىكى h، ئاساسىنىڭ يۈزى S).

ئومۇمەن تۈۋرۈكسىمان جىسىملارنىڭ ھەجمىمۇ

$$V = Sh$$

بولىدۇ، بۇنىڭدا S ئاساسىنىڭ يۈزى، h پىرىزمىنىڭ ئېگىزلىكى.

كونۇسنىڭ ھەجىم فورمۇلىسى:

$V = \frac{1}{3} Sh$ (ئېگىزلىكى h، ئاساسىنىڭ يۈزى S),

ئۇ ئوخشاش ئاساسلىق تەڭ ئېگىزلىكتىكى سىلىندىر ھەجمىنىڭ $\frac{1}{3}$ ىگە تەڭ.

پىرامىدا (كونۇس) نىڭ ئېگىزلىكى بولسا چوققىسىدىن ئاساسىغا تىك سىزىق يۈرگۈزگەندە، چوققىسى بىلەن تىك ئاساسى (تىك سىزىق بىلەن ئاساسىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى) ئارىسىدىكى ئارىلىقنى كۆرسىتىدۇ.

پىرامىدانىڭ ھەجمىمۇ ئوخشاش ئاساسلىق تەڭ ئېگىزلىكتىكى پىرىزما ھەجمىنىڭ $\frac{1}{3}$ ىگە تەڭ، يەنى پىرامىدانىڭ ھەجمى:

$V = \frac{1}{3} Sh$ (ئېگىزلىكى h، ئاساسىنىڭ يۈزى S).

بۇنىڭدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، پىرىزما بىلەن سىلىندىرنىڭ ھەجىم فورمۇلىسى ئوخشىشىپ كېتىدۇ، ھەر ئىككىسى ئاساسىنىڭ يۈزىگە ئېگىزلىكىنى كۆپەيتكەنگە تەڭ؛ پىرامىدا بىلەن كونۇسنىڭ ھەجىم فورمۇلىسى ئوخشىشىپ كېتىدۇ، ھەر ئىككىسى ئاساسىنىڭ يۈزىگە ئېگىزلىكىنىڭ $\frac{1}{3}$ نى كۆپەيتكەنگە تەڭ.

كېسىك كونۇس (كېسىك پىرامىدا) كونۇس (پىرامىدا)نى كېسىشتىن ھاسىل بولغانلىقتىن، ئىككى بىگىزسىمان جىسىمنىڭ ھەجىملىرىنىڭ ئايرىمىسىدىن كېسىك كونۇس (كېسىك پىرامىدا) نىڭ ھەجىم فورمۇلىسىغا ئىگە بولىمىز.

$$V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h,$$

بۇنىڭدا S'، S لار ئايرىم ـ ئايرىم ئۈستۈنكى ۋە ئاستىنقى ئاساسلىرىنىڭ يۈزلىرى، h كېسىك كونۇس (كېسىك پىرا ـ مىدا) نىڭ ئېگىزلىكى.

بۇ فورمۇلىنى ئىسپاتلىغىلى بولىدۇ. كېسىك كونۇس (كېسىك پىرامىدا) نىڭ ئېگىزلىكى ئىككى ئاساسى ئارىسىدىكى ئارىلىقنى كۆرسىتىدۇ.

مۇلاھىزە؟

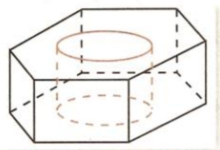
تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىملارنىڭ ھەجىم فورمۇلىسىنى سېلىشتۇرۇڭ:

$V_{\text{تۈۋرۈكسىمان جىسىم}}=Sh$ (S ئاساسىنىڭ يۈزى، h تۈۋرۈكسىمان جىسىمنىڭ ئېگىزلىكى);

$V_{\text{بىگىزسىمان جىسىم}}=\frac{1}{3}Sh$ (S ئاساسىنىڭ يۈزى، h بىگىزسىمان جىسىمنىڭ ئېگىزلىكى);

$V_{\text{كەسمە جىسىم}}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$ (S'، S لار ئايرىم ـ ئايرىم ئۈستۈنكى ۋە ئاستىنقى ئاساسلىرىنىڭ يۈزى، h كەسمە جىسىمنىڭ ئېگىزلىكى).

سىز بۇ ئۈچ فورمۇلا ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بايقىيالامسىز؟ تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىملارنى «ئالاھىدە» كەسمە جىسىملار دەپ قاراشقا بولامدۇ؟ ئۇلارنىڭ ھەجىم فورمۇلىسىنى كەسمە جىسىملارنىڭ ھەجىم فورمۇلىسىنىڭ «ئالاھىدە» شەكلى دەپ قاراشقا بولامدۇ؟



7.3.1 ـ رەسىم

3 ـ مىسال. ئوخشاش ئۆلچەملىك ئالتە قىرلىق بىر دۆۋە تۆمۈر گايكا (تۆمۈرنىڭ زىچلىقى $7.8\,g/cm^3$) نىڭ (7.3.1 ـ رەسىم) ئومۇمىي ئېغىرلىقى $5.8\,kg$، ئاساسى مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىك بولۇپ، ئۇنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى $12\,mm$، ئىچىدىكى تۆشۈكنىڭ دىئامېتىرى $10\,mm$، ئېگىزلىكى $10\,mm$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ بىر دۆۋە گايكىنىڭ تەخمىنەن قانچە دانە ئىكەنلىكىنى تاپايلى (π نىڭ قىممىتى 3.14، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىشقا بولىدۇ).

تەھلىل: ئالتە قىرلىق گايكا ئىپادىلىگەن گېئومېترىيىلىك جىسىم بىر بىرىكمە جىسىمدىن ئىبارەت بولۇپ، ئۇ بىر ئالتە قىرلىق پرىزمىنىڭ ئوتتۇرىسىدىن بىر سىلىندىرنى ئويۇپ ئېلىۋەتكەنگە تەڭ، شۇڭا ئۇنىڭ ھەجمى ئالتە قىرلىق پرىزمىنىڭ ھەجمىدىن سىلىندىرنىڭ ھەجمىنى ئېلىۋەتكەنگە تەڭ.

يېشىش: ئالتە قىرلىق گايكىنىڭ ھەجمى ئالتە قىرلىق پرىزمىنىڭ ھەجمى بىلەن سىلىندىر ھەجمىنىڭ ئايرىمىسىغا تەڭ، يەنى

$$\mathrm{V}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\times 6\times 10-3.14\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times 10$$
$$\approx 2956\ (mm^3)$$
$$\approx 2.956\ (cm^3).$$

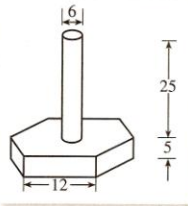
شۇڭا، بۇ بىر دۆۋە گايكىنىڭ سانى:

$5.8\times 1000\div(7.8\times 2.956)\approx 252$ (دانە).

جاۋابى: بۇ بىر دۆۋە گايكىنىڭ سانى تەخمىنەن 252 دانە.

بىرىكمە جىسىملارنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمىنى تېپىشتا، دەستلىنىپ قېلىش ياكى كىرىشىپ قېلىشتىن ساقلىنىش ئۈچۈن، بىرىكمە جىسىملارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە دىققەت قىلىش كېرەك.

مەشىق



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. كونۇسنىڭ سىرتقى يۈزى $a\,\mathrm{m}^2$ ھەمدە يان سىرتىنىڭ يېيىلمىسى يېرىم چەمبەر ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ كونۇسنىڭ ئاساسىنىڭ دىئامېتىرىنى تېپىڭ.

2. سول تەرەپتىكى رەسىم بىر خىل ماشىنا زاپچىسى بولۇپ، ئۇنىڭ ئاستىنقى قىسمى ئالتە قىرلىق پرىزما (ئاساسى مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىك، يان يېقى ئۆزئارا تەڭ بولغان تىك تۆتبۇلۇڭلاردىن ئىبارەت) شەكلىدە، ئۈستۈنكى قىسمى سىلىندىر (ئۆلچىمى رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، بىرلىكى: mm) شەكلىدە. ئۇنىڭغا سىنىك يالاتماقچى، ئەگەر ھەربىر كۋادرات مېتىرغا 0.11 kg سىنىك كەتسە، مۇشۇنداق 10 000 دانە زاپچاسقا سىنىك يالىتىش ئۈچۈن قانچە كىلوگرام سىنىك كېتىدۇ (نەتىجىسىنى 0.01 kg غىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ)؟

2-3-1 شارنىڭ ھەجمى ۋە سىرتقى يۈزى

1. شارنىڭ ھەجمى

شارنىڭ رادىئۇسىنى R دەپ پەرەز قىلساق، ئۇنىڭ ھەجمى رادىئۇسى R بىلەنلا مۇناسىۋەتلىك بولىدۇ، يەنى R نى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار قىلغان فۇنكسىيە بولىدۇ.

بۇ فورمۇلىنى كېيىن ئىسپاتلايمىز.

ئەمەلىيەتتە، ئەگەر شارنىڭ رادىئۇسى R بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ ھەجمى:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2. شارنىڭ سىرتقى يۈزى

شارنىڭ رادىئۇسىنى R دەپ پەرەز قىلساق، ئۇنىڭ سىرتقى يۈزى رادىئۇسى R تەرىپىدىن بىردىنبىر بەلگىلىنىدۇ، يەنى ئۇنىڭ سىرتقى يۈزى S مۇ رادىئۇسى R نى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار قىلغان فۇنكسىيە بولىدۇ.

بۇ فورمۇلىنى كېيىن ئىسپاتلايمىز.

ئەمەلىيەتتە، ئەگەر شارنىڭ رادىئۇسى R بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ سىرتقى يۈزى:

$$S=4\pi R^2.$$

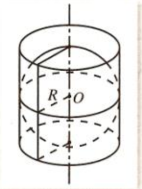
4 ـ **مىسال.** 8.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك، سىلىندىرنىڭ ئاساسىنىڭ دىئامېتىرى بىلەن ئېگىزلىكىنىڭ ھەر ئىككىسى شارنىڭ دىئامېتىرىغا تەڭ، تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلايلى:

(1) شارنىڭ ھەجمى سىلىندىر ھەجمىنىڭ $\frac{2}{3}$ سىگە تەڭ؛

(2) شارنىڭ سىرتقى يۈزى سىلىندىرنىڭ يان سىرتىغا تەڭ.

ئىسپات: (1) شارنىڭ رادىئۇسىنى R دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا سىلىندىر ئاساسىنىڭ رادىئۇسى

R ، ئېگىزلىكى $2R$ بولىدۇ.



8.3.1 ـ رەسىم

$$\because \quad V_{\text{شار}} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$V_{\text{سىلىندىر}} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3,$$

$$\therefore \quad V_{\text{شار}} = \frac{2}{3} V_{\text{سىلىندىر}} .$$

$$(2) \quad \because \quad S_{\text{شار}} = 4\pi R^2,$$

$$S_{\text{سىلىندىرنىڭ يان سىرتى}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2,$$

$$\therefore \quad S_{\text{شار}} = S_{\text{سىلىندىرنىڭ يان سىرتى}} .$$

بۇ پاراگرافتا بىز تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىملارنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمىنى ھېسابلاش ئۇسۇلىنى ئۆگەندۇق. ئىشلەپچىقىرىش، تۇرمۇش ئەمەلىيىتىدە بىزگە ئۇچرايدىغان جىسىملار گەرچە شەكلى مۇرەككەپ بولسىمۇ، لېكىن نۇرغۇنلىغان جىسىملارنىڭ شەكلىنى يۇقىرىدىكى ئاددىي گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل بولغان دەپ قاراشقا بولىدۇ، ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزى بىلەن ھەجمىنى بۇ ئاددىي گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ سىرتقى يۈزى بىلەن ھەجىملىرىنىڭ يىغىندىسىغا ئايلاندۇرۇشقا بولىدۇ.

مەشىق

1. بىر ھاۋا شارىنىڭ رادىئۇسىنى 1 ھەسسە چوڭايتساق، ئۇنىڭ ھەجمى ئەسلىدىكىنىڭ قانچە ھەسسىسىگە چوڭىيىدۇ؟

2. بىر كۇبنىڭ چوققىلىرىنىڭ ھەممىسى شار سىرتى ئۈستىدە ياتىدۇ، ئۇنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقى a cm بولسا، بۇ شارنىڭ ھەجمىنى تېپىڭ.

3. بىر شارنىڭ ھەجمى $100\,\text{cm}^3$ بولسا، ئۇنىڭ سىرتقى يۈزىنى ھېسابلاڭ (π نىڭ قىممىتى 3.14، نەتىجىسىنى $1\,\text{cm}^2$ غىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىشقا بولىدۇ).

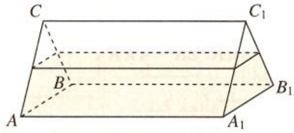
3.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

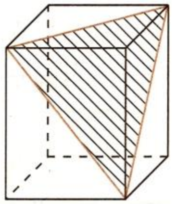
1. بەش قىرلىق كېسىك پىرامىدانىڭ ئۈستۈنكى، ئاستىنقى ئاساسلىرى ئوخشاشلا مۇنتىزىم بەش تەرەپلىك، تەرەپلىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم 8 cm ۋە 18 cm ، يان يېقى ئۆزئارا تەڭ بولغان تەڭ يانلىق تراپېتسىيە، يان قىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 13 cm بولسا، ئۇنىڭ يان سىرتىنى تېپىڭ.

2. كېسىك كونۇسنىڭ ئۈستۈنكى ۋە ئاستىنقى ئاساسلىرىنىڭ رادىئۇسى ئايرىم ـ ئايرىم r ، R ھەمدە يان سىرتىنىڭ يۈزى ئىككى ئاساسىنىڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، بۇ كېسىك كونۇسنىڭ ياسىغۇچىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

3. رەسىمدىكىدەك، بىر پاراللېلېپىپېدتىن ئۆزئارا قوشنا ئۈچ يېقىنىڭ دىئاگوناللىرىنى بويلاپ
بىر پىرامىدا كېسىۋېلىنغان، بۇ پىرامىدانىڭ ھەجمى بىلەن ئېشىپ قالغان گېئومېترىيىلىك جى-
سىمنىڭ ھەجمىنىڭ نىسبىتىنى تېپىڭ.



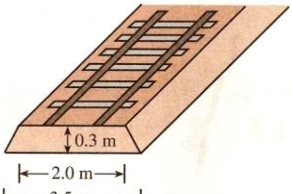
(4 ـ مىسال ئۈچۈن)



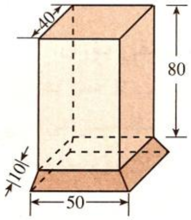
(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكىدەك، ئۈچ قىرلىق پىرىزما شەكىلدىكى بىر قاچىغا سۇ قاچىلانغان، ئۇنىڭ يان قى-
رى $AA_1=8$. ئەگەر يان يېقى AA_1B_1B نى گورىزونتال يۆنىلىشتە قويساق، سۇ يۈزى دەل AC، BC،
A_1C_1، B_1C_1 لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىلىرىدىن ئۆتىدۇ. ئاساسى ABC نى گورىزونتال يۆنىلىشتە قوي-
ساق، سۇ يۈزىنىڭ ئېگىزلىكى قانچە بولىدۇ؟

5. رەسىمدىكىسى تۇرخۇننىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلى (رەسىمدىكى بىرلىك: cm)، ئۇنىڭ ئاس-
تىنقى قىسمى تۆت قىرلىق كېسىك پىرامىدا (ئۈستۈنكى ۋە ئاستىنقى ئاساسى ئوخشاشلا كۋادرات،
يان ياقلىرى ئۆزئارا تەڭ بولغان تەڭ يانلىق تراپېتسىيە) شەكىلدىكى جىسىم؛ ئۈستۈنكى قىسمى
تۆت قىرلىق پىرىزما (ئاساسى بىلەن تۆت قىرلىق كېسىك پىرامىدانىڭ ئۈستۈنكى ئاساسى ئۈستمۇ-
ئۈست چۈشىدۇ، يان ياقلىرى ئۆزئارا تەڭ بولغان تىك تۆتبۇلۇڭ) شەكىلدىكى جىسىم؛ يامغۇر
سۈيىنىڭ چىرىتىشىدىن ساقلىنىش ھەم كۆرۈنۈشىنىڭ كۆركەم بولۇشى ئۈچۈن، تۇرخۇنغا فارفور
خىش چاپلاشقا توغرا كەلسە، جەمئىي قانچە كۋادرات سانتىمېتىر فارفور خىش كېتىدۇ؟ (نەتىجىسىنى
$1\,\mathrm{cm}^2$ غىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىشقا بولىدۇ)



(6 ـ مىسال ئۈچۈن)



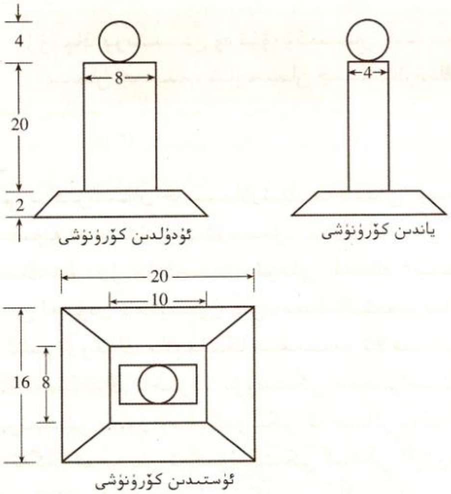
(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

6. دۆلىتىمىزدىكى تۆمۈريوللارنىڭ ئۇلىغا شېغىل ياتقۇزۇلىدۇ (رەسىمدىكىدەك). سىز بېي-
جىڭدىن شاڭخەيگىچە بولغان تۆمۈريولنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ماتېرىياللاردىن ئېنىقلاپ بىلىۋېلىڭ ھەم-
دە ئۇنىڭغا قانچە كۇب شېغىل كەتكەنلىكىنى مۆلچەرلەڭ (نەتىجىسىنى $1\,\mathrm{m}^3$ غىچە ئېنىقلىقتا ئې-
لىڭ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىشقا بولىدۇ).

B گۇرۇپپا

1. رەسىمدىكىسى بىر مۇكاپات لوڭقىسىنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بولۇپ، مۇكاپات لوڭ-

قىسنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىگە ئاساسەن ئۇنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمىنى ھېسابلاڭ (ئۆلچىمى رەسىمدىكىدەك، بىرلىكى: cm، π نىڭ قىممىتى 3.14، نەتىجىسىنى $1\,\mathrm{cm}^3$ غىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىشقا بولىدۇ).



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. ئۈچ قىرلىق پرىزما $ABC-A'B'C'$ نىڭ يان ياقلىرى ئوخشاشلا تىك تۆتبۇلۇڭ شەكلىدە ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ئۇنىڭ خالىغان ئىككى يان يېقىنىڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى ئۈچىنچى يان يېقىنىڭ يۈزىدىن چوڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

3. ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا بىر تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ يان تەرىپى، ئىككى تىك تەرىپى ياتقان تۈز سىزىقلارنى ئوق قىلىپ، قالغان تەرەپلىرىنى تولۇق بىر قېتىم ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان ئەگرى سىرتتىن ئۈچ گېئومېترىيىلىك جىسىم قورشاپ چىقىشقا بولىدۇ، ئۇلارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ ھەجملىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى تەھلىل قىلىڭ.

زۇ گېڭ پرىنسىپى ۋە تۇۋرۇكسىمان جىسىم، پىرامىداسىمان جىسىم، شارسىمان جىسىملارنىڭ ھەجمى

I زۇ گېڭ پرىنسىپى

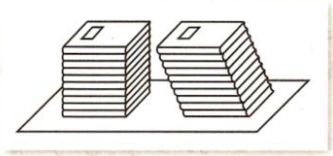
تۇۋرۇكسىمان جىسىم، پىرامىداسىمان جىسىملارنىڭ ھەجمىنى تېپىش ئۈچۈن، بىز تۆۋەندە زۇ گېڭ پرىنسىپىنى قىسقىچە تونۇشتۇرۇپ ئۆتىمىز.

زۇ گېڭ تەخەللۇسى جىڭ شو، زۇ چۇڭجىنىڭ ئوغلى، فەنياڭ ئايمىقى جىشيەن ناھىيىسى (ھازىرقى خېبېي ئۆلكىسى لەييۈەن ناھىيىسى) دىن، مەملىكىتىمىزنىڭ جەنۇبىي شىمال سۇلالىسى دەۋرىدىكى ئۇلۇغ ئالىم. زۇ گېڭ ماتېماتىكا ساھەسىدە ئالاھىدە تۆھپىلەرنى ياراتقان، ئۇ ئەمەلىيەت ئاساسىدا، 5 ـ ئەسىرنىڭ ئاخىرىدا تۆۋەندىكى ھەجىم ھېسابلاش پرىنسىپىنى ئوتتۇرىغا قويغان: زۇ گېڭ پرىنسىپى: «يۈز ۋە ئېگىزلىكى ئوخشاش بولسا، ھەجىملىرى پەرقلەنمەيدۇ». بۇنىڭ مەنىسى: ئەگەر ئوخشاش ئېگىزلىكتىكى ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىمنى ئوخشاش ئېگىزلىكتە كەسكەندە كېلىپ چىققان كەسمىنىڭ يۈزلىرى ھامان ئۆزئارا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ھەجىملىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ.

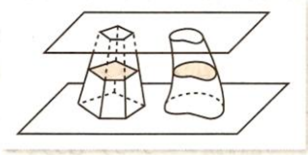
زۇ گېڭ پرىنسىپى: ئىككى پاراللېل تەكشىلىك ئارىسىدىكى ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىم بۇ ئىككى تەكشىلىككە پاراللېل بولغان خالىغان تەكشىلىك ئارقىلىق كېسىلگەندە، ئەگەر كېلىپ چىققان ئىككى كەسمىنىڭ يۈزى ھامان ئۆزئارا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ھەجمى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ.

1 ـ رەسىمدىكىدەك، ئىككى پاراللېل تەكشىلىك ئارىسىدىكى ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىم (ئۇلارنىڭ شەكلى ئوخشاش بولمىسىمۇ بولىدۇ) بۇ ئىككى تەكشىلىككە پاراللېل بولغان خالىغان بىر تەكشىلىك ئارقىلىق كېسىلگەندە، ئەگەر كەسمىلەرنىڭ (رەسىمدىكى بويالغان قىسىم) يۈزى ئۆزئارا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ھەجىملىرى چوقۇم ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ.

بۇ پرىنسىپ ئىنتايىن ئاددىي ۋە چۈشىنىشلىك. مەسىلەن، بىر دۆۋە قەغەزنى دەستىلەپ شىرە ئۈستىگە قويساق بىر گېئومېترىيىلىك جىسىم ھاسىل بولىدۇ (2 ـ رەسىم)، ئۇنىڭ شەكلىنى ئۆزگەرتسەك، گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ شەكلىدىمۇ ئۆزگىرىش بولىدۇ، شۇنىڭ بىلەن يەنە بىر گېئومېترىيىلىك جىسىم كېلىپ چىقىدۇ، لېكىن بۇ ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ئېگىزلىكىدە ئۆزگىرىش بولمايدۇ، ھەربىر ۋاراق قەغەز يۈزىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىدىمۇ ئۆزگىرىش بولمايدۇ، شۇڭا بۇ ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ھەجىملىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ. بۇ پرىنسىپ ۋە پاراللېلېپىپېدنىڭ ھەجمىنى ھېسابلاش فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ، تۇۋرۇكسىمان جىسىم، پىرامىداسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم ۋە شارسىمان جىسىملارنىڭ ھەجمىنى ھېسابلاپ چىقالايمىز.



2 ـ رەسىم

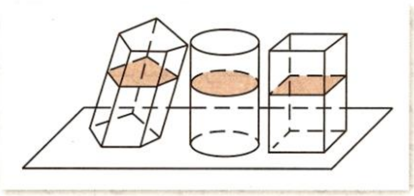


1 ـ رەسىم

زۇ گېڭ يۇقىرىقى پرىنسىپنى باشقا دۆلەت ماتېماتىكا ئالىملىرىدىن مىڭ نەچچە يىل بۇرۇن ئوتتۇرىغا قويغان. ياۋروپادا 17 ـ ئەسىرگە كەلگەندىلا ئاندىن ئىتالىيىلىك ماتېماتىكا ئالىمى كاۋالېرى (Cavalieri.B، 1598 ~ 1647 ـ يىللار) يۇقىرىقى يەكۈننى ئوتتۇرىغا قويغان.

Ⅱ تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىملارنىڭ ھەجمى

تۆۋەندە بىز زۇگېڭ پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىملارنىڭ ھەجىم فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز.



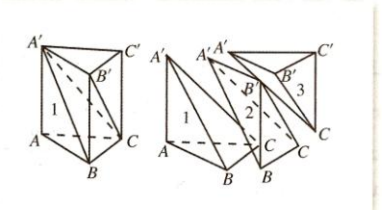
3 ـ رەسىم

ئاساسلىرىنىڭ يۈزى ئوخشاشلا S كە، ئېگىزلىكلىرى ئوخشاشلا h قا تەڭ بولغان خالىغان بىر پرىزما، بىر سىلىندىر ۋە بىر پاراللېلېپىپېدنىڭ ئاساسلىرى ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتىدۇ دەپ پەرەز قىلساق(3 ـ رەسىم)، زۇ گېڭ پرىنسىپىغا ئاساسەن ئۇلارنىڭ ھەجىملىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ. پاراللېلېپىپېدنىڭ ھەجمى ئۇنىڭ ئاساسىنىڭ يۈزى بىلەن ئېگىزلىكىنىڭ كۆپەيتمىسىگە تەڭ بولغانلىقتىن، بىز تۈۋرۈكسىمان جىسىمنىڭ ھەجىم فورمۇلىسىغا ئېگە بولىمىز:

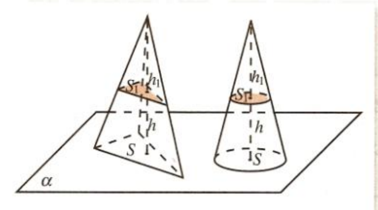
$$V_{\text{تۈۋرۈكسىمان جىسىم}} = Sh.$$

بۇنىڭدىكى S تۈۋرۈكسىمان جىسىمنىڭ ئاساسىنىڭ يۈزى، h بولسا ئۇنىڭ ئېگىزلىكى.

ئاساسلىرىنىڭ يۈزى ئوخشاشلا S كە، ئېگىزلىكلىرى ئوخشاشلا h قا تەڭ بولغان ئىككى بىگىزسىمان جىسىمنىڭ (مەسىلەن، بىر پىرامىدا بىلەن بىر كونۇس) ئاساسلىرى ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتىدۇ دەپ پەرەز قىلساق (4 ـ رەسىم)، زۇگېڭ پرىنسىپىغا ئاساسەن ئۇلارنىڭ ھەجىملىرىنىڭ ئۆزئارا تەڭ بولىدىغانلىقىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. دېمەك، ئاساسلىرىنىڭ يۈزى ۋە ئېگىزلىكلىرى ئۆزئارا تەڭ بولغان ئىككى بىگىزسىمان جىسىمنىڭ ھەجىملىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ.



5 ـ رەسىم



4 ـ رەسىم

5 ـ رەسىمدىكىدەك، ئۈچ قىرلىق پرىزما $ABC-A_1B_1C_1$ نىڭ ئاساسىنىڭ يۈزى (يەنى $\triangle ABC$ نىڭ يۈزى)نى S، ئېگىزلىكى (يەنى A' نۇقتىدىن ABC تەكشىلىككىچە بولغان ئارىلىق) نى h دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ ھەجمى Sh بولىدۇ. بۇ ئۈچ قىرلىق پرىزمىنى $A'BC$ تەكشىلىك ۋە $A'B'C$ تەكشىلىك ئارقىلىق ئۈچ دانە ئۈچ قىرلىق پىرامىداغا بۆلسەك، بۇنىڭدىكى 1 ـ، 2 ـ ئۈچ قىرلىق پىرامىدالارنىڭ ئاساسلىرىنىڭ يۈزى ئۆزئارا تەڭ ($S_{\triangle A'AB}=S_{\triangle A'B'B}$)، ئېگىزلىكلىرىمۇ ئۆزئارا تەڭ (C نۇقتىدىن $ABB'A'$ تەكشىلىككىچە بولغان ئارىلىق) بولىدۇ؛ 2 ـ، 3 ـ ئۈچ قىرلىق پىرامىدالارنىڭمۇ ئاساسلىرىنىڭ يۈزى ئۆزئارا تەڭ ($S_{\triangle B'BC}=S_{\triangle B'C'C}$)، ئېگىزلىكلىرىمۇ ئۆزئارا تەڭ (A' نۇقتىدىن $BCC'B'$ تەكشىلىككىچە بولغان ئارىلىق) بولىدۇ. شۇڭا، بۇ ئۈچ دانە ئۈچ قىرلىق پىرامىدانىڭ ھەجملىرى ئۆزئارا تەڭ بولۇپ، ھەربىر ئۈچ قىرلىق پىرامىدانىڭ ھەجمى $\frac{1}{3}Sh$ بولىدۇ.

ئەگەر ئۈچ قىرلىق پىرامىدا $A'-ABC$ (يەنى 1 ـ ئۈچ قىرلىق پىرامىدا)نىڭ ئاساسىنى $\triangle ABC$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ ئاساسىنىڭ يۈزى S، ئېگىزلىكى h بولۇپ، ھەجمى $\frac{1}{3}Sh$ بولىدۇ. بۇ ئۈچ قىرلىق پىرامىدانىڭ ھەجمى ئۇنىڭ ئاساسىنىڭ يۈزى بىلەن ئېگىزلىكىنى كۆپەيتكەندىكى كۆپەيتمىنىڭ ئۈچتىن بىرىگە تەڭ بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ.

ئەمەلىيەتتە، خالىغان بىر بىگىزسىمان جىسىمغا نىسبەتەن، ئۇنىڭ ئاساسىنىڭ يۈزىنى S، ئېگىزلىكىنى h دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ ھەجمى ئاساسىنىڭ يۈزى S، ئېگىزلىكى h بولغان ئۈچ قىرلىق پىرامىدانىڭ ھەجمىگە تەڭ بولىدۇ، يەنى بۇ بىگىزسىمان جىسىمنىڭ ھەجمى

$$V_{\text{بىگىزسىمان جىسىم}}=\frac{1}{3}Sh.$$

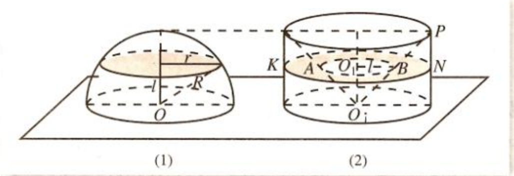
مانا بۇ، بىگىزسىمان جىسىمنىڭ ھەجىم فورمۇلىسىدۇر.

تۈۋرۈكسىمان جىسىم ۋە بىگىزسىمان جىسىملار ئىككى خىل ئاساسىي گېئومېترىيىلىك جىسىم بولۇپ، ئۇلارنىڭ ھەجىم فورمۇلىسى ئەمەلىيەتتە كەڭ قوللىنىلىدۇ.

Ⅲ شارسىمان جىسىملارنىڭ ھەجمى

ئالدى بىلەن يېرىم شار (رادىئۇسى R) نىڭ ھەجمىنى ھېسابلاشنى مۇھاكىمە قىلايلى. زۇگېڭ پرىنسىپىنى قوللىنىش ئۈچۈن، ھەجمىنى تېپىشقا بولىدىغان، ئېگىزلىكى يېرىم شارنىڭ ئېگىزلىكى بىلەن تەڭ ھەمدە خالىغان بىر گورىزونتال تەكشىلىك ئارقىلىق ئۇلارنى كەسكەندە، كېلىپ چىققان كەسمىلەرنىڭ يۈزلىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدىغان بىر گېئومېترىيىلىك جىسىمنى تېپىشقا توغرا كېلىدۇ.

6 ـ رەسىم (1) دىكىدەك، چوڭ چەمبەرگە پاراللېل ھەمدە چوڭ چەمبەر بىلەن ئارىلىقى l بولغان تەكشىلىك ئارقىلىق يېرىم چەمبەرنى كەسكەندە كېلىپ چىققان چەمبەر يۈزى (دائىرە) نىڭ رادىئۇسىنى r دەپ پەرەز قىلساق، ئۇھالدا $r=\sqrt{R^2-l^2}$ بولىدۇ، شۇڭا كەسمىنىڭ يۈزى $S_1=\pi r^2=\pi(R^2-l^2)=\pi R^2-\pi l^2$ بولىدۇ. S_1 نى رادىئۇسى R بولغان چەمبەر يۈزىدىن رادىئۇسى l بولغان بىر دانە مەركەزداش چەمبەرنى ئويۇپ ئېلىۋالغاندىن كېيىن كېلىپ چىققان ھالقىنىڭ يۈزى دەپ قاراشقا بولىدۇ.



6 ـ رەسىم

بۇنىڭ ئۈچۈن، بىز ئاساسىنىڭ رادىئۇسى بىلەن ئېگىزلىكى ئوخشاشلا R غا تەڭ بولغان بىر سىلىندىرنى ئېلىپ، سىلىندىرنىڭ ئىچىدىن سىلىندىرنىڭ ئۈستۈنكى ئاساسىنى ئاساس، ئاستىنقى ئاساسىنىڭ مەركىزىنى چوققا قىلغان بىر كونۇسنى ئويۇۋېلىپ، كېلىپ چىققان گېئومېترىيىلىك جىسىم بىلەن يېرىم شارنى ئوخشاش بىر گورىزونتال تەكشىلىككە قويىمىز (6 ـ رەسىم (2)).

خالىغان بىر گورىزونتال تەكشىلىك ئارقىلىق بۇ ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىمنى كەسسەك، كەسمىلەر ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا چەمبەر يۈزى ۋە ھالقىسىمان يۈزدىن ئىبارەت بولىدۇ. يۇقىرىقى بايانلاردىن بىلىشكە بولىدۇكى:

ھالقا يۈزى چوڭ چەمبىرىنىڭ رادىئۇسى R، كىچىك چەمبىرىنىڭ رادىئۇسى l، يۈزى $S_2 = \pi R^2 - \pi l^2 = \pi(R^2 - l^2)$ بولىدۇ. شۇڭا، $S_1 = S_2$، زۇگېڭ پرىنسىپىغا ئاساسەن بۇ ئىككى گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ھەجمى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ، يەنى

$$\frac{1}{2} V_{\text{شار}} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R$$

$$= \frac{2}{3} \pi R^3,$$

شۇڭا شارنىڭ ھەجمى:

$$V_{\text{شار}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

زۇگېڭ پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ ھەجمىنى تېپىشتىكى ئاساسلىق ھالقا شەرتنى قانائەتلەندۈرىدىغان ھەجمىنى تېپىشقا بولىدىغان بىر گېئومېترىيىلىك جىسىمنى تېپىشتىن ئىبارەت.

پراكتىكا تاپشۇرۇقى

مەقسەت: مەلۇم جىسىمنىڭ (مەسىلەن، بەزى بىنالارنىڭ) ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ، گېئومېترىيىنىڭ رېئال تۇرمۇشتىكى قوللىنىلىشىنى ھېس قىلىش.

تەلەپ: گۇرۇپپىلارنى بىرلىك قىلىپ، ئوخشىمىغان ئورۇنلارغا بېرىپ كۆرگەن جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىش، ئاخىرىدا ئومۇملاشتۇرۇپ تاپشۇرۇقنى تاماملاش.

جەريان:

1. ئۆزىڭىز ئوقۇۋاتقان مەكتەپتىكى مەلۇم ئوقۇتۇش بىناسىنى ئوخشىمىغان يۆنىلىشتىن كۆزىتىپ، ئۇنىڭ گېئومېترىيىلىك قۇرۇلمىسىنى چۈشىنىپ، ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ (شەكىلنىڭ ئالاھىدىلىكىگە تەسىر يەتكۈزمىگەن ئاساستا، ئۆلچەمگە، سىزىقلارغا بەك قاتتىق تەلەپ قويۇلمايدۇ).

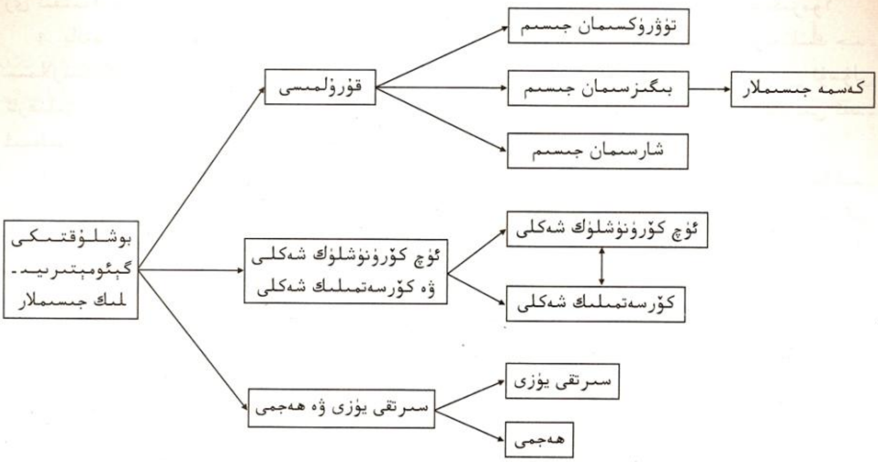
2. يۇقىرىدا بايان قىلىنغان ئوقۇتۇش بىناسىنىڭ ئېگىزلىكى، ئۇزۇنلۇقى، كەڭلىكى ۋە تامنىڭ قېلىنلىقى، دېرىزىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى قاتارلىق سانلىق مەلۇماتلارنى مۆلچەرلەڭ.

مۇلاھىزە: (1) مەكتىپىڭلارنىڭ ئوقۇتۇش بىناسىنىڭ ئاساسىي قۇرۇلمىسى قانداق گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىككە ئىگە؟

(2) ئۆزىڭىز تۇرۇشلۇق رايوندىكى باشقا بىنالارنى كۆزىتىڭ، ئۇلارنىڭ كۆپىنچىسى قانداق گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىككە ئىگە؟ باشقا پەن بىلىملىرىگە بىرلەشتۈرۈپ ياكى كەسپىي خادىملاردىن تەلىم ئېلىپ ۋە ياكى توردىن ئاختۇرۇپ، يۇقىرىدا بايان قىلىنغاندەك گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىككە ئىگە بولۇشىنىڭ سەۋەبىنى چۈشىنىۋېلىڭ.

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. بىز ياشاۋاتقان دۇنيادا، خىلمۇخىل جىسىملار مەۋجۇت، ئۇلارنىڭ كۆپىنچىسى تۈۋرۈكسىمان جىسىم، پىرامىداسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىم شەكىلدىكى جىسىملاردىن تەركىب تاپقان. تۈۋرۈكسىمان جىسىم، پىرامىداسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىملارنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى تونۇش ۋە ئىگىلەش بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى تونۇشنىڭ ئاساسى. بۇ بابتا بىز ئۇچراشقان بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملار يەككە تۈۋرۈكسىمان جىسىم، پىرامىداسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىملار ياكى ئۇلارنىڭ ئاددىي بىرىكمە جىسىملىرىدىنلا ئىبارەت. سىز مۇرەككەپرەك گېئومېترىيىلىك جىسىم (مەسىلەن، ئەتراپىڭىزدىكى بىنالار)لارنىڭ قۇرۇلمىسىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

2. بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارغا نىسبەتەن، ئوخشىمىغان تۈرلەرگە ئايرىش ئۆلچىمى بولىدۇ. سىز ئوخشىمىغان تەرەپلەردىن تۈۋرۈكسىمان جىسىم، پىرامىداسىمان جىسىم، كەسمە جىسىم، شارسىمان جىسىم قاتارلىق بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى تونۇيالامسىز؟ سىزنىڭ تۈرلەرگە ئايرىشتىكى ئاساسىڭىز نېمە؟

3. بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى تەتقىق قىلىش ئۈچۈن، تەكشىلىكتە بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى سىزىپ چىقىشىمىزغا توغرا كېلىدۇ. بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ قايسى خىل ئوخشىمىغان ئىپادىلىنىش شەكلى بار؟ بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلى بىزنىڭ بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئىگىلىشىمىزگە ياردىمى بولىدۇ. بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملار ئارقىلىق ئۇنىڭ

ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىپ چىققىلى بولىدۇ، ئوخشاشلا ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىدىن بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ شەكلىنى تەسەۋۋۇر قىلغىلى بولىدۇ، بۇ ئىككىسى ئارىسىدىكى ئۆزئارا ئايلاندۇرۇش بىزنىڭ گېئومېتىرىيىلىك بىۋاسىتە كۆزىتىش ئىقتىدارىمىزنى، بوشلۇق تەسەۋۋۇرى ئىقتىدارىمىزنى يېتىلدۈرىدۇ. سىز بۇ جەھەتتە تەسىرات ۋە ھېسسىي تۇيغۇغا ئىگە بولدىڭىزمۇ؟

4. يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ، بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقالايمىز. سىز يانتۇ ئىككى ئوق بويىچە سىزىش ئۇسۇلى ئارقىلىق بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنى سىزىشنىڭ ئاساسىي قەدەم باسقۇچلىرىنى ئەسلىيەلەمسىز؟

5. بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجىمىنى ھېسابلاشتا، تەكشىلىك گېئومېتىرىيىسى بىلىملىرىدىن تولۇق پايدىلىنىپ، بوشلۇقتىكى شەكىللەرنى تەكشىلىكتىكى شەكىللەرگە ئايلاندۇرۇۋېلىشقا توغرا كېلىدۇ، بولۇپمۇ تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىملارنىڭ يان سىرتىنىڭ يېيىلمىسىنى ئىگىلىۋېلىش كېرەك. ساۋاقداشلار تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىملارنىڭ يان سىرتىنىڭ يېيىلمىسىنىڭ نېمە بولىدىغانلىقىنى، ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزىنى قانداق ھېسابلاش كېرەكلىكىنى، تۈۋرۈكسىمان جىسىم، بىگىزسىمان جىسىم، كەسمە جىسىملارنىڭ ھەجىملىرى ئارىسىدا بەلگىلىك مۇناسىۋەت بار ـ يوقلۇقىنى ئەسلەپ كۆرۈشى كېرەك.

6. شار ئالاھىدىرەك بولغان بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىمدۇر، ئۇنىڭ سىرتقى يۈز فورمۇلىسى ۋە ھەجىم فورمۇلىسى قانداق؟

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ.

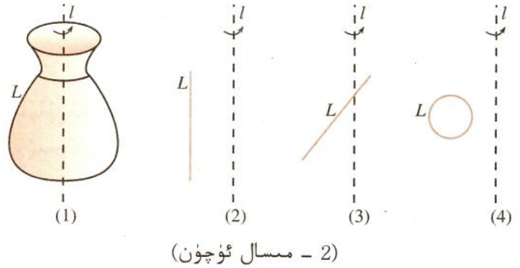
(1) دەرەخ كەسكۈچىلەر دەرەخنى كەسكەندىن كېيىن، دەرەخ شاخلىرىنى كېسىپ ئېلىۋېتىدۇ، ئاندىن ئېھتىياجغا ئاساسەن ئۇنى ئوخشىمىغان ئۇزۇنلۇقتىكى ياغاچلارغا بۆلۈپ كېسىدۇ، بۇ چاغدا ياغاچلارنى تەقرىبىي ھالدا ________ جىسىم دەپ قاراشقا بولىدۇ.

(2) تۆمۈر سىم ئارقىلىق بىر ئۈچبۇلۇڭ ياساپ، بۇ ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ چوققىسىغا ئايرىم - ئايرىم بىردىن چوكىنى مۇقىملاشتۇرۇپ، ئاندىن بۇ ئۈچ چوكىنىڭ يەنە بىر ئۇچلىرىنى تۆمۈر سىم بىلەن تۇتاشتۇرۇپ بىر ئۈچبۇلۇڭ ھاسىل قىلساق، بىر گېئومېتىرىيىلىك مودېلغا ئىگە بولىمىز. ئەگەر چوكىلارنىڭ ئۇزۇنلۇقلىرى ئۆزئارا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ گېئومېتىرىيىلىك جىسىم ________ بولۇشى مۇمكىن.

(3) كۋادراتنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقىنى n ھەسسە چوڭايتساق، ئۇنىڭ يۈزى ______ ھەسسە چوڭىيىدۇ؛ كۇبنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقىنى n ھەسسە چوڭايتساق، ئۇنىڭ سىرتقى يۈزى ______ ھەسسە چوڭىيىدۇ، ھەجمى ______ ھەسسە چوڭىيىدۇ.

(4) چەمبەرنىڭ رادىئۇسىنى n ھەسسە چوڭايتساق، ئۇنىڭ يۈزى _____ ھەسسە چوڭىيىدۇ؛ شارنىڭ رادىئۇسىنى n ھەسسە چوڭايتساق، ئۇنىڭ سىرتقى يۈزى _____ ھەسسە چوڭىيىدۇ، ھەجمى ______ ھەسسە چوڭىيىدۇ.

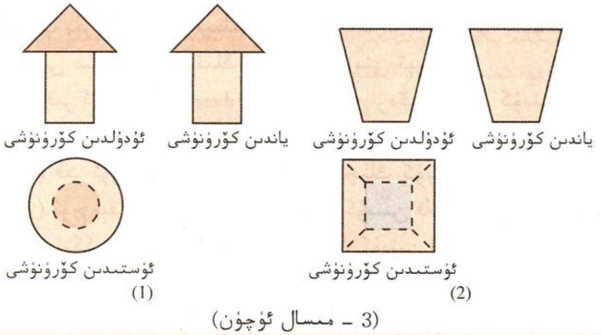
(5) سىلىندىرنىڭ ئاساسىنى ئۆزگەرتمەي، ھەجمىنى ئەسلىدىكىنىڭ n ھەسسىسىگىچە چوڭايتساق، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ ئېگىزلىكى ئەسلىدىكىنىڭ ______ ھەسسىسىگىچە چوڭىيىدۇ؛ ئەكسىچە، ئېگىزلىكى ئۆزگەرمىگەندە، ئاساسىنىڭ رادىئۇسى ئەسلىدىكىنىڭ ______ ھەسسىسىگىچە چوڭىيىدۇ.



(2 - مىسال ئۈچۈن)

2. سول تەرەپتىكى (1) رەسىمگە تەقلىد قىلىپ، (2)، (3)، (4) لەردىكى L نى l نىڭ ئەتراپىدا تولۇق بىر قېتىم ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنى سىزىپ چىقىڭ.

3. گېئومېتىرىيىلىك جىسىملارنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىللىرى رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك بېرىلگەن، ئۇلارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ.

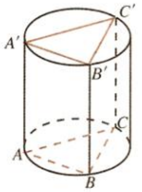


(3 - مىسال ئۈچۈن)

4. 3 - مىسالدىكى ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكىللەرگە ئاساسەن، قاتتىق قەغەزدىن ئەمەلىي جىسىملارنىڭ مودېلىنى ياساڭ ھەمدە ئۇلارنى

ئۆگىنىش قوراللىرى ۋە زىننەت بۇيۇملىرى قىلىپ لايىھىلەڭ.

5. رەسىمدىكىدەك، سىلىندىرنىڭ ئىچىدە بىر ئۈچ قىرلىق پرىزما بار، ئۈچ قىرلىق پرىزمىنىڭ ئاساسى سىلىندىر ئاساسىنىڭ ئىچىدە ھەمدە ئاساسى مۇنتىزىم ئۈچبۇلۇڭ شەكلىدە، ئەگەر سىلىندىرنىڭ ھەجمى V، ئاساسىنىڭ دىئامېتىرى بىلەن ياسىغۇچىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئۆزئارا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا ئۈچ قىرلىق پرىزمىنىڭ ھەجمى قانچە؟

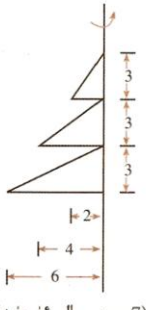


(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

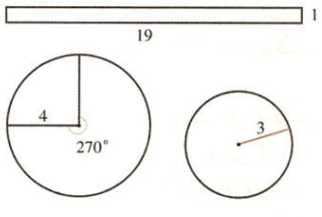

(6 ـ مىسال ئۈچۈن)

6. رەسىمدە كۆرسىتىلگىنى ۋارونكىسىمان تۈرۈبا ئۇلىغۇچ بولۇپ، ئۇنىڭ ياسىغۇچىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 35 cm، ئىككى ئاساسىنىڭ دىئامېتىرى ئايرىم - ئايرىم 50 cm ۋە 20 cm بولسا، بۇنداق ئۇلىغۇچتىن 10 مىڭ دانە ياساش ئۈچۈن قانچە كۋادرات مېتىر قاڭالتىر كېتىدۇ؟ (π نىڭ قىممىتى 3.1، نەتىجىسىنى $1\,m^2$ غىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ)

7. ئۈچ دانە تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ رەسىمدىكىدەك قويۇلغان، ئۇلار مۇقىم بىر تۈز سىزىقنى بويلاپ تولۇق بىر قېتىم ئايلانغاندا بىر گېئومېترىيىلىك جىسىم ھاسىل بولىدۇ، ئۇنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ ھەمدە سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمىنى تېپىڭ.



(7 ـ مىسال ئۈچۈن)



(8 ـ مىسال ئۈچۈن)

8. رەسىمدە كۆرسىتىلگەن (بىرلىكى: cm) تەكشىلىكتىكى شەكىلگە ئاساسەن، قاتتىق قەغەزدىن پايدىلىنىپ بىر گېئومېترىيىلىك جىسىم ياساڭ ھەمدە بۇ گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىڭ ۋە ئۇنىڭ سىرتقى يۈزىنى تېپىڭ.

9. قىر ئۇزۇنلۇقى 4 cm بولغان قىزىل رەڭلىك بىر كۇبنى مۇۋاپىق ھالدا قىر ئۇزۇنلۇقى 1 cm بولغان كىچىك كۇبلارغا بۆلەكچى، سوئال:

(1) قىر ئۇزۇنلۇقى 1 cm بولغان كىچىك كۇبتىن جەمئىي قانچىسى كېلىپ چىقىدۇ؟

(2) ئۈچ يېقى قىزىل بويالغان كىچىك كۇبتىن قانچىسى بار؟ ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى قانچە؟

(3) ئىككى يېقى قىزىل بويالغان كىچىك كۇبتىن قانچىسى بار؟ ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى قانچە؟

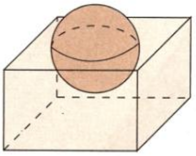
(4) بىر يېقى قىزىل بويالغان كىچىك كۇبتىن قانچىسى بار؟ ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى قانچە؟

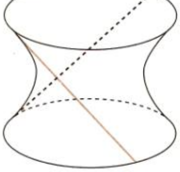
(5) ئالتىلا يېقى بويالمىغان كىچىك كۇبتىن قانچىسى بار؟ ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى

قانچە؟ ئۇلار قانچە كۇب سانتىمېتىر بوشلۇقنى ئىگىلەيدۇ؟
10. تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم 3 cm، 4 cm، 5 cm، ئۇ-
نى ئۈچ تەرىپى ئەتراپىدا تولۇق بىر قېتىمدىن ئايلاندۇرساق ئايرىم - ئايرىم ئۈچ گېئومېترىيىلىك جىسىم ھا-
سىل بولىدۇ. بۇ ئۈچ گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ قۇرۇلمىسىنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ ۋە ئېيتىپ بېرىڭ، ئۇلار-
نىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمىنى تېپىڭ.

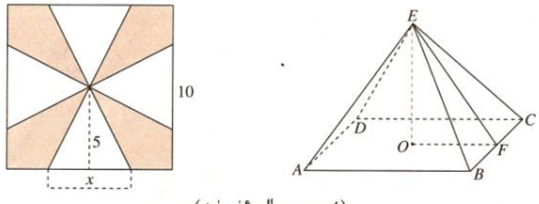
B گۇرۇپپا

1. 8 دانە ياقتىن قورشالغان بىر گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ، ھەربىر يېقى مۇنتىزىم ئۈچبۇلۇڭلۇق
شەكىلدە ھەمدە A، B، C، D تۆت چوققىسى ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتىدۇ، $ABCD$ بولسا تەرەپ ئۇ-
زۇنلۇقى 30 cm بولغان كۋادراتتىن ئىبارەت.
(1) بۇ گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ قۇرۇلمىسىنى تەسەۋۋۇر قىلىڭ ھەمدە ئۇنىڭ ئۈچ كۆرۈنۈشلۈك
شەكلى ۋە كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىڭ؛
(2) بۇ گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ سىرتقى يۈزى ۋە ھەجمىنى تېپىڭ؛
(3) قاتتىق قەغەزدىن پايدىلىنىپ بۇ مودېلنى ياساڭ.
2. ئۇزۇنلۇقى، كەڭلىكى، ئېگىزلىكى ئايرىم - ئايرىم 80 cm، 60 cm، 55 cm بولغان بىر سۇ ئوقۇرىدا
200 000 cm^3 سۇ بار. ھازىر ئۇنىڭغا دىئامېتىرى 50 cm بولغان ياغاچ شارنى سالساق، ئەگەر بۇ ياغاچ شار-
نىڭ ئۈچتىن ئىككى قىسمى سۇ ئىچىدە، ئۈچتىن بىر قىسمى سۇ ئۈستىدە بولسا، ئۇ ھالدا سۇ بۇ سۇ يول-
نىڭ سىرتىغا ئېقىپ چىقىپ كېتەمدۇ؟


(2 - مەسىلە ئۈچۈن)


(3 - مەسىلە ئۈچۈن)

3. سىز رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك قەغەز سېۋەتنى كۆرگەنمۇ؟ ئۇنىڭ گېئومېترىيىلىك قۇرۇلمىسىنى
ئىنچىكىلىك بىلەن كۆزەتسىڭىز، ئۇنىڭ نۇرغۇنلىغان تۈز سىزىقلاردىن قورشالغانلىقىنى بايقىيالايسىز، سىز
ئۇنىڭ قانداق ھاسىل بولغانلىقىنى بىلەمسىز؟
4. تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 10 cm بولغان كۋادرات شەكىللىك بىر پارچە قەلەينى رەسىمدە كۆرسىتىلگەن
تۇتۇق قىسىم بويىچە كېسىۋېلىپ، ئاندىن ئېشىپ قالغان ئۆزئارا تەڭ تۆت دانە تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭدىن
بىر مۇنتىزىم تۆت قىرلىق پىرامىدا (ئاساسى كۋادرات بولۇپ، ئۇنىڭ چوققىسىدىن ئاساسىغا تىك چۈ-
شۈرسەك، تىك ئاساسى ئاساسىنىڭ مەركىزىدە بولغان تۆت قىرلىق پىرامىدا بولىدۇ) شەكىلدىكى قاچا يا-
سالغان، بۇ قاچىنىڭ ھەجمى V نى x نىڭ فۇنكسىيىسى ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.



(4 - مەسىلە ئۈچۈن)

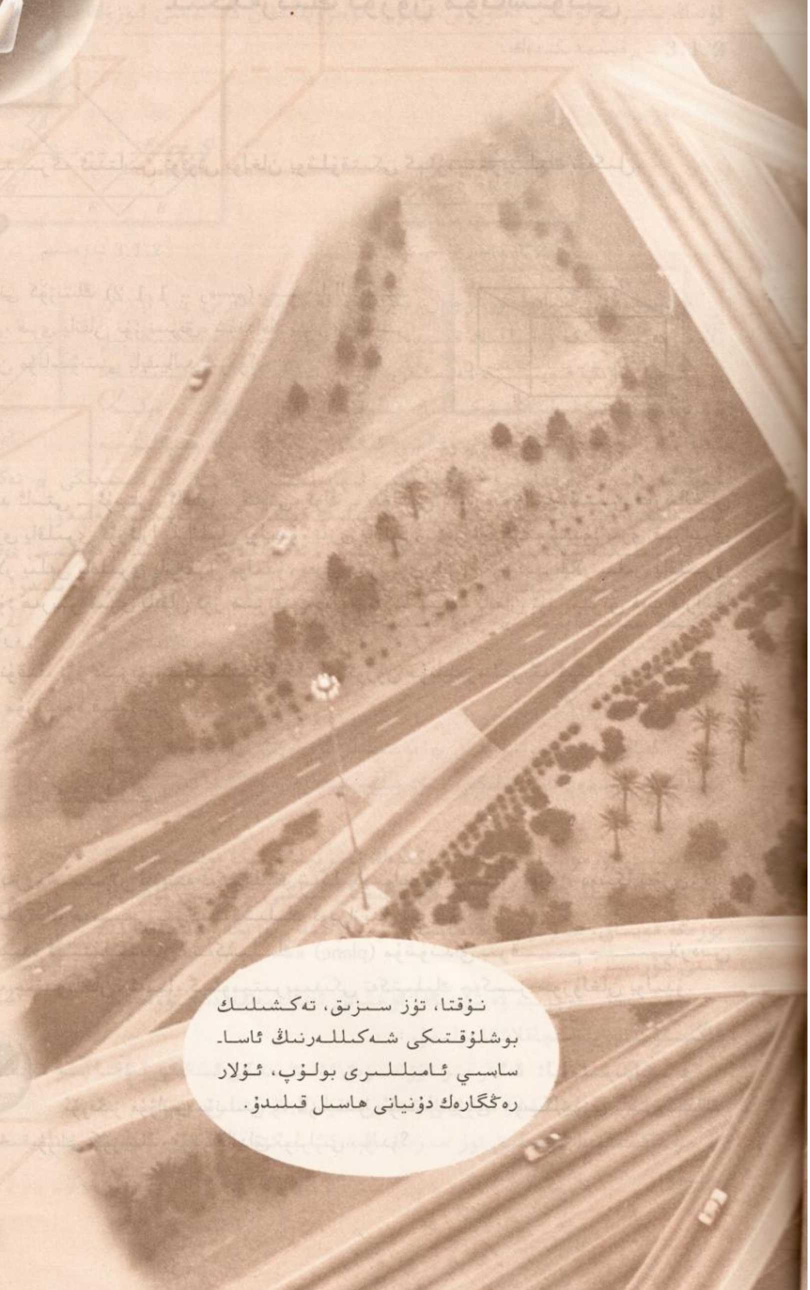
2 - باب

نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

شەكلى خىلمۇخىل بولغان بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى قانداق تونۇش ۋە ئۆگىنىش كېرەك؟ بۇنىڭ ئومۇمىي ئۇسۇلى مۇنداق: بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنى ھاسىل قىلىدىغان ئاساسىي ئېلېمېنت — نۇقتا، تۈز سىزىق ۋە تەكشىلىكتىن قول سېلىپ، ئۇلارنىڭ خۇسۇسىيىتى ۋە ئۆزئارا ئورۇن مۇناسىۋىتىنى تەتقىق قىلىمىز، پۈتۈنلۈكتىن قىسمەنلىككە، قىسمەنلىكتىن پۈتۈنلۈككە ئۆتۈپ، بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك جىسىملارنىڭ خۇسۇسىيىتى بىلەن تەدرىجىي تونۇشىمىز.

بۇ بابتا پاراللېلېپىپېدنى ۋاستە قىلىپ، بوشلۇقتىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى بىلەن بىۋاستە تونۇشۇپ ۋە ئۇنى چۈشىنىپ، پاراللېل بولۇش، تىك بولۇشقا دائىر ھۆكۈم قىلىش ۋە ئۇلارنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ماتېماتىكىلىق تىل ئارقىلىق بايان قىلىمىز ھەم بەزى يەكۈنلەرنى ئىسپاتلاشنى ئۆگىنىۋالىمىز.

2

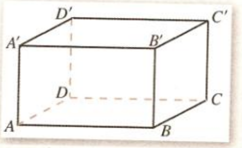


نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىك بوشلۇقتىكى شەكىللەرنىڭ ئاساسىي ئامىللىرى بولۇپ، ئۇلار رەڭگارەڭ دۇنيانى ھاسىل قىلىدۇ.

1-2 بوشلۇقتىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

پاراللېلېپىپېد بىزگە ئىنتايىن تونۇش بولغان بوشلۇقتىكى گېئومېترىيىلىك شەكىل.

مۇلاھىزە ؟



1.1.2 – رەسىم

پاراللېلېپىپېدنى كۆزىتىڭ (1.1.2 – رەسىم)، سىز پاراللېلېپىپېدنىڭ چوققىسى، قىرى ياتقان تۈز سىزىق، شۇنداقلا يېنى، ئاساسى ئارىسىدىكى ئورۇن مۇناسىۋىتىنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟

پاراللېلېپىپېد ئاستى – ئۈستى، ئالدى – كەينى، ئوڭ – سولدىن ئىبارەت ئالتە ياقتىن قورشالغان بولۇپ، ئۇنىڭ بەزى ياقلىرى ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ، بەزى ياقلىرى ئۆزئارا كېسىشىدۇ؛ بەزى قىرلىرى ياتقان تۈز سىزىقلار بىلەن ياقلىرى پاراللېل بولىدۇ، بەزى قىرلىرى ياتقان تۈز سىزىقلار بىلەن ياقلىرى ئۆزئارا كېسىشىدۇ؛ ھەربىر قىرى ياتقان تۈز سىزىقنى مەلۇم تەكشىلىكتە ياتقان تۈز سىزىق دەپ قاراشقا بولىدۇ، ۋەھاكازالار.

بوشلۇقتىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەر قانداق ئورۇن مۇناسىۋەتلىرىگە ئىگە؟ بۇ پاراگرافتا بىز بۇ مەسىلىنى مۇزاكىرە قىلىمىز.

1-1-2 تەكشىلىك

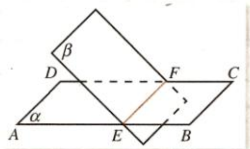
تۇرمۇشتىكى بەزى جىسىملار ئادەتتە تەكشىلىك شەكلىدە بولىدۇ، ئۈستەل يۈزى، دوسكا يۈزى، دېڭىز يۈزى قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى بىزگە تەكشىلىك ئوبرازىنى بېرىدۇ.

گېئومېترىيىدە ئېيتىلىدىغان «تەكشىلىك» (plane) مۇشۇنداق بىرقىسىم جىسىملاردىن ئابستراكسىيىلەپ چىقىرىلغان، ئەمما، گېئومېترىيىدىكى تەكشىلىك چەكسىز سوزۇلغان بولىدۇ.

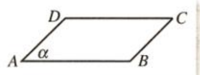
كۆزىتىش

ئۆزىڭىز مۇۋاپىق يۆنىلىش ۋە ئارىلىقتىن ئۈستەل يۈزى، دوسكا يۈزى ياكى ئىشىك يۈزىنى كۆزىتىڭ، ئۇلار قانداق ئوبرازنى بېرىدۇ؟

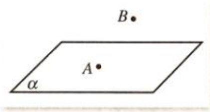
بىز دائىم گورىزونتال قويۇلغان تەكشىلىكنى پاراللېل تۆت تەرەپلىك قىلىپ سىزىمىز، پاراللېل تۆت تەرەپلىك ئارقىلىق تەكشىلىكنى ئىپادىلەيمىز، 2.1.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك. پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ تار بۇلۇڭى °45، توغرىسىغا سىزىلغان تەرىپى قوشنا تەرىپىنىڭ 2 ھەسسىسىگە تەڭ قىلىپ سىزىلىدۇ. ئەگەر تەكشىلىكنىڭ بىر قىسمى ئىككىنچى بىر تەكشىلىك تەرىپىدىن توسۇۋېلىنسا، ئۇنىڭ ستېرېئولۇقىنى ئاشۇرۇش ئۈچۈن، توسۇۋېلىنغان قىسمىنى ئۈزۈك سىزىقلار بىلەن سىزىمىز، 3.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك.



3.1.2 ـ رەسىم



2.1.2 ـ رەسىم



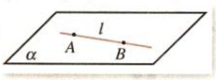
4.1.2 ـ رەسىم

تەكشىلىكنى ئىپادىلەش ئۈچۈن، بىز ئادەتتە گرېك ھەرپى α، β، γ لارنى تەكشىلىككە ۋەكىللىك قىلىدىغان پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ بىر بۇلۇڭىغا يېزىپ قويىمىز، مەسىلەن، α تەكشىلىك، β تەكشىلىك؛ شۇنداقلا يەنە تەكشىلىككە ۋەكىللىك قىلىدىغان پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ تۆت چوققىسى ياكى قارىمۇقارشى ئىككى چوققىسىنىڭ ئىنگلىزچە چوڭ ھەرپلىرى ئارقىلىقمۇ تەكشىلىكنى ئىپادىلەيمىز، 2.1.2 ـ رەسىمدىكى α تەكشىلىكنى $ABCD$ تەكشىلىك، AC تەكشىلىك ياكى BD تەكشىلىك قىلىپ ئىپادىلەشكىمۇ بولىدۇ.

تەكشىلىكتە چەكسىز كۆپ نۇقتىلار بولىدۇ، تەكشىلىكنى نۇقتىلار توپلىمى دەپ قاراشقا بولىدۇ. 4.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، A نۇقتا α تەكشىلىكتە ياتسا، $A \in \alpha$ قىلىپ يېزىلىدۇ؛ B نۇقتا α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا ياتسا، $B \notin \alpha$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

ئەگەر l تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك بىر ئورتاق نۇقتا P غا ئىگە بولسا، l تۈز سىزىق α تەكشىلىكنىڭ ئىچىدە ياتامدۇ؟ ئەگەر l تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك ئىككى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولسىچۇ؟



5.1.2 ـ رەسىم

ئەمەلىي تۇرمۇشتا، بىز تۆۋەندىكىدەك تەجرىبىگە ئىگە بولىمىز: بىر تۈز سىزغۇچنىڭ قىرى ئۈستىدىكى خالىغان ئىككى نۇقتىسىنى ئۈستەل يۈزىگە قويساق، سىزغۇچنىڭ ھەممە قىرى ئۈستەل يۈزىگە چۈشىدىغانلىقىنى كۆرىمىز.

يۇقىرىدىكى تەجرىبە ۋە شۇنىڭغا ئوخشاش ئەمەلىيەتلەردىن تۆۋەندىكى ئاكسىئومىنى يىغىنچاقلاشقا بولىدۇ.

1 ـ ئاكسىئوما: ئەگەر بىر تۈز سىزىق ئۈستىدىكى ئىككى نۇقتا بىر تەكشىلىكتە ياتسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىق مۇشۇ تەكشىلىكتە ياتىدۇ (5.1.2 ـ رەسىم).

بۇ ئاكسىئوما ئارقىلىق تۈز سىزىقنىڭ تەكشىلىكتە ياتىدىغان ـ ياتمايدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ.

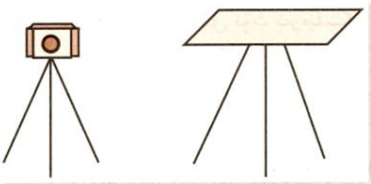
ئىشلەپچىقىرىش، تۇرمۇش جەريانىدا، كىشىلەر ئۇزاق مۇددەت كۆزىتىش ۋە ئەمەلىيەتتىن ئۆتكۈزۈش ئارقىلىق تەكشىلىككە دائىر بەزى ئاساسىي خۇسۇسىيەتلەرنى يەكۈنلەپ چىققان، بىز ئۇنى ئاكسىئوما سۈپىتىدە قوللىنىمىز، بۇ ئاكسىئومىلار بىزنىڭ يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىشىمىزنىڭ ئاساسى.

نۇقتىنىڭ ھەرىكىتىدىن سىزىق ھاسىل بولىدۇ، سىزىقنىڭ ھەرىكىتىدىن تەكشىلىك ھاسىل بولىدۇ. تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ھەممىسىنى نۇقتىنىڭ توپلىمى دەپ قاراشقا بولىدۇ. P نۇقتا l تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتسا $P \in l$ قىلىپ يېزىلىدۇ؛ P نۇقتا l تۈز سىزىقنىڭ سىرتىدا ياتسا $P \notin l$ قىلىپ يېزىلىدۇ. ئەگەر l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلار α تەكشىلىكتە ياتسا، **l تۈز سىزىق α تەكشىلىكتە ياتىدۇ** دەيمىز ياكى **α تەكشىلىك l تۈز سىزىقتىن ئۆتىدۇ** دەيمىز، ئۇ $l \subset \alpha$ قىلىپ يېزىلىدۇ؛ ئەكسىچە بولغاندا، l تۈز سىزىق α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا ياتىدۇ دەيمىز، ئۇ $l \not\subset \alpha$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

1 ـ ئاكسىئومىنى بەلگە ئارقىلىق ئىپادىلەشكىمۇ بولىدۇ:

$A \in l,\ B \in l$ ھەمدە $A \in \alpha,\ B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$.

تۇرمۇشتا، بىز دائىم مۇنداق ھادىسىلەرنى كۆرىمىز: ئۈچ پۇتلۇق تىرەك فوتوئاپپارات ياكى ئۆلچەشتە ئىشلىتىلىدىغان مېنزولانى مۇقىم تىرەپ تۇرىدۇ (6.1.2 ـ رەسىم).

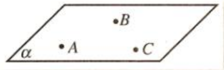


6.1.2 ـ رەسىم

يۇقىرىدىكى ئەمەلىيەت ۋە شۇنىڭغا ئوخشاش تەجرىبىلەردىن تۆۋەندىكى ئاكسىئومىنى يىغىنچاقلاشقا بولىدۇ.

2 ـ ئاكسىئوما: ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتمىغان ئۈچ نۇقتىدىن ئۆتىدىغان بىر ۋە پەقەت بىرلا تەكشىلىك بار.

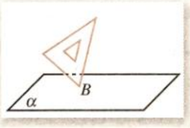
2 ـ ئاكسىئوما تەكشىلىكنىڭ ئۆزىگە خاس ئاساسىي خۇسۇسىيىتىنى ئەكس ئەتتۈرۈپ بېرىدۇ، ئۇ بىر تەكشىلىكنى بەلگىلەشنىڭ ئاساسى بىلەن تەمىنلەيدۇ.



7.1.2 ـ رەسىم

ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتمىغان ئۈچ نۇقتا A، B، C ئارقىلىق بەلگىلەنگەن تەكشىلىكنى «ABC تەكشىلىك» قىلىپ يېزىشقا بولىدۇ، 7.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك.

مۇلاھىزە ؟



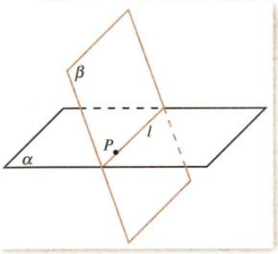
8.1.2 ـ رەسىم

8.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئۈچبۇلۇڭلۇق سىزغۇچنىڭ بىر بۇلۇڭىنى پارتا يۈزىگە تىك قىلىپ قويساق، ئۈچبۇلۇڭلۇق سىزغۇچ ياتقان تەكشىلىك بىلەن پارتا يۈزى ياتقان تەكشىلىك پەقەت بىر B نۇقتىدا كېسىشەمدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

1.1.2 ـ رەسىمدىكى پاراللېلېپىپېدنى كۆزەتسەك، ئىككى تەكشىلىكنىڭ بىر تۈز سىزىقتا كېسىشكەنلىكىنى بايقايمىز، بۇ تۈز سىزىق ئىككى تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش سىزىقى دەپ ئاتىلىدۇ، مەسىلەن، $ABCD$ تەكشىلىك بىلەن $B'BCC'$ تەكشىلىك BC دا كېسىشىدۇ. يەنە بىر تەرەپتىن، ئۆزئارا قوشنا ئىككى تەكشىلىك بىر ئورتاق نۇقتىغا ئىگە، مەسىلەن، $ABCD$ تەكشىلىك بىلەن $B'BCC'$ تەكشىلىك بىر ئورتاق نۇقتا B غا ئىگە، B نۇقتىدىن ئۆتكەن بىر ۋە پەقەت بىرلا ئورتاق تۈز سىزىق BC بار.

يۇقىرىدىكىلەر ۋە باشقا ئەمەلىيەتلەردىن تۆۋەندىكىنى يىغىنچاقلاپ چىقىشقا بولىدۇ.

3 ـ ئاكسىئوما: ئەگەر ئۈستمۇئۈست چۈشمىگەن ئىككى تەكشىلىك بىر ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولسا، ئۇ هالدا ئۇلار بۇ نۇقتىدىن ئۆتكەن بىر ۋە پەقەت بىرلا ئورتاق تۈز سىزىققا ئىگە بولىدۇ.



9.1.2 ـ رەسىم

بەزى دەسلەپكى ئۇقۇم (ئاساسىي ئۇقۇم) ۋە بەزى ئىسپاتلاش تەلەپ قىلىنمايدىغان دەسلەپكى ھۆكۈملۈك (ئاكسىئوما) تىن چىقىش قىلىپ، لوگىكىلىق ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىشتىن پايدىلىنىپ، باشقا ھۆكۈملۈك ۋە تېئورېمىلارنى كەلتۈرۈپ چىقىرىش ئۇسۇلى ئاكسىئومىلاشتۇرۇش ئۇسۇلى دەپ ئاتىلىدۇ.

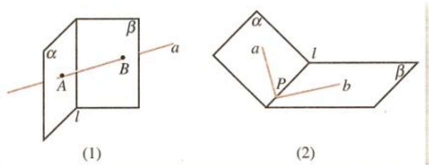
3 ـ ئاكسىئوما بىزگە شۇنى ئېيتىپ بېرىدۇكى، ئەگەر ئۆزئارا ئۈستمۇئۈست چۈشمىگەن ئىككى تەكشىلىك بىر ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولسا، ئۇ هالدا بۇ ئىككى تەكشىلىك چوقۇم ئۆزئارا كېسىشىدۇ ھەمدە ئۇلارنىڭ كېسىشىش سىزىقى چوقۇم بۇ ئورتاق نۇقتىدىن ئۆتىدۇ. دېمەك، ئەگەر ئىككى تەكشىلىك بىر ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولسا، ئۇ هالدا ئۇلارنىڭ چوقۇم يەنە بىر ئورتاق نۇقتىسى بولىدۇ، پەقەت بۇ ئىككى تەكشىلىكنىڭ ئىككى ئورتاق نۇقتىسىنى تېپىپ چىقساقلا، ئۇلارنىڭ كېسىشىش سىزىقىنى تېپىپ چىققىلى بولىدۇ.

α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىك ئۆزئارا l تۈز سىزىقتا كېسىشسە، ئۇ $\alpha \cap \beta = l$ قىلىپ يېزىلىدۇ، 9.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك. 3 ـ ئاكسىئومىنى بەلگە ئارقىلىق ئىپادىلىسەكمۇ بولىدۇ:

$$P \in \alpha \text{ ھەمدە } P \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l,\ P \in l.$$

يۇقىرىدىكى ئۈچ ئاكسىئومىنى كىشىلەر ئۇزاق مۇددەت كۆزىتىش ۋە ئەمەلىيەتتىن ئۆتكۈزۈش ئارقىلىق يەكۈنلەپ چىققان بولۇپ، ئۇ گېئومېترىيىلىك ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىشنىڭ ئاساسى، شۇنداقلا بوشلۇقتىكى شەكىللەرنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ تەتقىق قىلىشىمىزنىڭ ئاساسى.

1 ـ مىسال. 10.1.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەن شەكىللەردىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى بەلگە ئارقىلىق ئىپادىلەيلى.



10.1.2 ـ رەسىم

تەھلىل: شەكىلگە ئاساسەن، ئالدى بىلەن نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىمىز، ئاندىن ئۇلارنى بەلگە ئارقىلىق ئىپادىلەيمىز.

يېشىش: (1) دە، $\alpha \cap \beta = l$، $a \cap \alpha = A$، $a \cap \beta = B$.

(2) دە، $\alpha \cap \beta = l$، $a \subset \alpha$، $b \subset \beta$، $a \cap l = P$، $b \cap l = P$.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەر ئىچىدە توغرا بولغىنى ( ).

(A) ئۈچ نۇقتا ئارقىلىق بىر تەكشىلىكنى بەلگىلەشكە بولىدۇ

(B) بىر تۈز سىزىق ۋە بىر نۇقتا ئارقىلىق بىر تەكشىلىكنى بەلگىلەشكە بولىدۇ

(C) تۆت تەرەپلىك بىر تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ

(D) ئىككى ئىككىدىن ئۆزئارا كېسىشىدىغان ھەمدە نۇقتىداش بولمىغان ئۈچ تۈز سىزىق بىر تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ

2. (1) تەكشىلىكداش بولمىغان تۆت نۇقتا ئارقىلىق قانچە تەكشىلىك بەلگىلەشكە بولىدۇ؟

(2) نۇقتىداش بولغان ئۈچ تۈز سىزىق ئارقىلىق قانچە تەكشىلىك بەلگىلەشكە بولىدۇ؟

3. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ، توغرا بولسا «$\checkmark$» بەلگىسىنى، خاتا بولسا «$\times$» بەلگىسىنى قويۇڭ.

(1) α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇلار پەقەت چەكلىك ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ. ( )

(2) بىر تۈز سىزىق ۋە بۇ تۈز سىزىقنىڭ سىرتىدىكى بىر نۇقتا ئارقىلىق بىر ۋە پەقەت بىرلا تەكشىلىك ئۆتكۈزۈشكە بولىدۇ. ( )

(3) ئۆزئارا كېسىشىدىغان ئىككى تۈز سىزىق ئارقىلىق بىر ۋە پەقەت بىرلا تەكشىلىك ئۆتكۈزۈشكە بولىدۇ. ( )

(4) ئەگەر ئىككى تەكشىلىك سىزىقداش بولمىغان ئۈچ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تەكشىلىك ئۇستمۇئۇست چۈشىدۇ. ( )

4. تۆۋەندىكى جۈملىلەرنى بەلگە ئارقىلىق ئىپادىلەڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ ماس شەكىللىرىنى سىزىپ چىقىڭ:

(1) A نۇقتا α تەكشىلىكتە، ئەمما B نۇقتا α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا؛

(2) a تۈز سىزىق α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى بىر M نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(3) a تۈز سىزىق ھەم α تەكشىلىكتە، ھەم β تەكشىلىكتە ياتىدۇ.

2-1-2 بوشلۇقتىكى تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

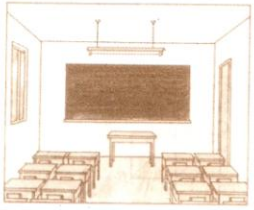
مۇلاھىزە ؟

ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى ئىككى تۈز سىزىق قانچە خىل ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ئىگە؟ بوشلۇقتىكى ئىككى تۈز سىزىقچۇ؟

11.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، سىنىپتىكى كۈن نۇرلۇق لامپا ياتقان تۈز سىزىق بىلەن دوسكىنىڭ ئوڭ ـ سول ئىككى قىرى ياتقان تۈز سىزىق ھەم ئۆزئارا كېسىشمەيدۇ، ھەم تەكشىلىكداش ئەمەس، يەنى

ئۇلار ھەرقانداق بىر تەكشىلىكتە بىللە ياتمايدۇ؛ يەنە مەسىلەن، تيەنئەنمېن مەيدانىدىكى (12.1.2 – رەسىم) بايراق خادىسى ياتقان تۈز سىزىق بىلەن چاڭئەن كوچىسى ياتقان تۈز سىزىق ھەم كېسىشمەيدۇ، ھەم تەكشىلىكداش ئەمەس، يەنى ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتمايدۇ.

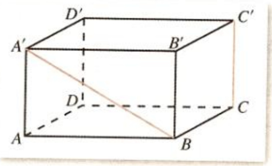
12.1.2 – رەسىم



11.1.2 – رەسىم

كۆزىتىش

13.1.2 – رەسىمدىكىدەك، $ABCD-A'B'C'D'$ پاراللېلېپىپېدتا، $A'B$ كېسىك ياتقان تۈز سىزىق بىلەن $C'C$ كېسىك ياتقان تۈز سىزىق قانداق ئورۇن مۇناسىۋەتتە ئىگە؟



13.1.2 – رەسىم

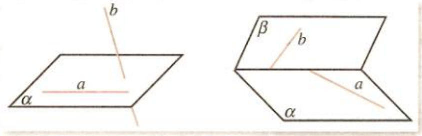
ھەرقانداق بىر تەكشىلىكتە بىللە ياتمايدىغان ئىككى تۈز سىزىقنى **ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار** (skew lines) دەپ ئاتايمىز.

بوشلۇقتىكى ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى پەقەت ۋە پەقەت ئۈچ خىللا بولىدۇ:

- تەكشىلىكداش تۈز سىزىقلار
  - ئۆزئارا كېسىشكۈچى تۈز سىزىقلار: ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتىدۇ، بىر ۋە پەقەت بىرلا ئورتاق نۇقتىغا ئىگە؛
  - پاراللېل تۈز سىزىقلار: ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتىدۇ، ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس؛
- ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار
  - ھەرقانداق بىر تەكشىلىكتە بىللە ياتمايدۇ، ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس.

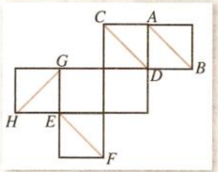
مۇشۇنداق بولغاندا، بوشلۇقتىكى ئىككى تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقى بىلەن ئىلگىرى بىز ئۆگىنىپ ئۆتكەن تەكشىلىكتىكى ئىككى تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقىنىڭ مەنىسى بىردەك بولىدۇ، يەنى ئالدى بىلەن بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە يېتىشى، ئاندىن ئۇلار ئۆزئارا كېسىشمەسلىكى كېرەك.

14.1.2 – رەسىمدىكىدەك، شەكىل سىزغاندا، ئۈچراشماس تۈز سىزىق a، b لارنىڭ تەكشىلىكداش ئەمەسلىك ئالاھىدىلىكىنى گەۋدىلەندۈرۈپ ئىپادىلەش ئۈچۈن، ئۇلار ئادەتتە بىر ياكى ئىككى تەكشىلىككە سىزىلىدۇ.



14.1.2 ـ رەسىم

ئىزدىنىش

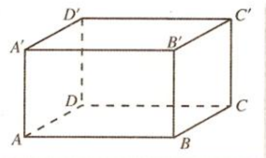


15.1.2 ـ رەسىم

15.1.2 ـ رەسىمدە بىر كۇبنىڭ يېيىلمىسى بېرىلگەن، ئەگەر ئۇنى ئەسلىدىكى كۇبقا ئايلاندۇرساق، ئۇ ھالدا AB، CD، EF، GH تۆت كېسىك ياتقان تۈز سىزىقلار ئىچىدە ئۇچراشماس تۈز سىزىقتىن ____ جۈپ بار.

بىزگە مەلۇمكى، ئەگەر ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتقان ئىككى تۈز سىزىق ئۈچىنچى بىر تۈز سىزىققا پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ. بوشلۇقتا، ئەگەر ئىككى تۈز سىزىق ئۈچىنچى بىر تۈز سىزىققا پاراللېل بولسا، يەنە مۇشۇنىڭغا ئوخشاش قانۇنىيەت مەۋجۇت بولامدۇ؟

كۆزىتىش



16.1.2 ـ رەسىم

16.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپىد $ABCD-A'B'C'D'$ دا، $DD' // AA'$، $BB' // AA'$ بولسا، ئۇ ھالدا BB' بىلەن DD' پاراللېل بولامدۇ؟

باشقا ئەمەلىيەتلەرگە بىرلەشتۈرۈپ، تۆۋەندىكى ئاكسىئومىنى يىغىنچاقلاپ چىقىشقا بولىدۇ:

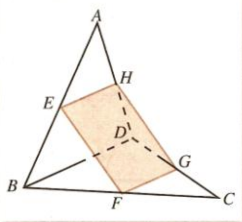
4 ـ ئاكسىئوما: ئوخشاش بىر تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

بۇ ئاكسىئوما شۇنى چۈشەندۈرىدۇكى، بوشلۇقتا بېرىلگەن بىر تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان بارلىق تۈز سىزىقلار ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ. ئۇ بىزنى بوشلۇقتىكى ئىككى تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش ئاساسى بىلەن تەمىنلەيدۇ.

4 ـ ئاكسىئومىدا بايان قىلىنغان خۇسۇسىيەت ئادەتتە بوشلۇقتىكى **پاراللېل سىزىقلارنىڭ ئۆتكۈزۈشچانلىقى** دەپ ئاتىلىدۇ.

4 ـ ئاكسىئومىغا ئاساسەن، يۇقىرىدىكى «كۆزىتىش»نىڭ جاۋابىنى مۇئەييەنلەشتۈرۈشكە بولىدۇ.

2 ـ مىسال. 17.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ دا، E، F، G، H لار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا AB، BC، CD، DA لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، تۆت تەرەپلىك $EFGH$ نىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.



17.1.2 ـ رەسىم

ئىسپات: B بىلەن D نى تۇتاشتۇرىمىز،

چۈنكى EH بولسا $\triangle ABD$ نىڭ ئوتتۇرا سىزىقى،

شۇڭا $EH \parallel BD$ ھەمدە $EH=\frac{1}{2}BD$.

ئوخشاش قائىدە بويىچە، $FG \parallel BD$ ھەمدە $FG=\frac{1}{2}BD$.

چۈنكى $EH \parallel FG$ ھەمدە $EH=FG$،

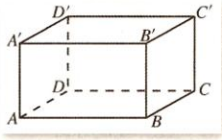
شۇڭا تۆت تەرەپلىك $EFGH$ پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولىدۇ.

ئىزدىنىش

2 ـ مىسالدا، ئەگەر يەنە بىر شەرت $AC=BD$ نى قوشساق، بۇ ھالدا تۆت تەرەپلىك $EFGH$ قانداق شەكىل بولىدۇ؟

مۇلاھىزە

تەكشىلىكتە، «ئەگەر بىر بۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى يەنە بىر بۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى بىلەن ئايرىم ـ ئايرىم پاراللېل بولسا، بۇ ھالدا بۇ ئىككى بۇلۇڭ ئۆزئارا تەڭ ياكى ئۆزئارا تولدۇرغۇچى بۇلۇڭلار بولىدۇ»غانلىقىنى ئاسانلا ئىسپاتلىيالايمىز. بوشلۇقتا، بۇ يەكۈن يەنىلا كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟



18.1.2 ـ رەسىم

18.1.2 ـ رەسىمنى كۆزىتىڭ، پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ دا، $\angle ADC$ بىلەن $\angle A'D'C'$، $\angle ADC$ بىلەن $\angle A'B'C'$ نىڭ ئىككى تەرىپى ئايرىم ـ ئايرىم ماس ھالدا پاراللېل بولسا، بۇ ئىككى گۇرۇپپا بۇلۇڭنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتى قانداق بولىدۇ؟

رەسىمدىن كۆرۈشكە بولىدۇكى،

$$\angle ADC=\angle A'D'C',\quad \angle ADC+\angle A'B'C'=180°.$$

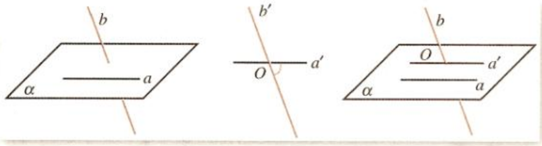
ئومۇمەن، تۆۋەندىكى تېئورېمىغا ئىگە بولىمىز:

تېئورېما: بوشلۇقتا ئەگەر ئىككى بۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى ئايرىم ـ ئايرىم ماس ھالدا پاراللېل بولسا، بۇ ھالدا بۇ ئىككى بۇلۇڭ ئۆزئارا تەڭ ياكى ئۆزئارا تولدۇرغۇچى بۇلۇڭلار بولىدۇ.

بىزگە مەلۇمكى، تەكشىلىكتە ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا كېسىشسە 4 دانە بۇلۇڭ ھاسىل بولىدۇ، بۇنىڭ ئىچىدە $90°$ تىن چوڭ بولمىغان بۇلۇڭلار ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭى دەپ ئاتىلىدۇ. ئارا بۇلۇڭ بىر تۈز سىزىقنىڭ يەنە بىر تۈز سىزىققا نىسبەتەن يانتۇلۇق دەرىجىسىنى ئىپادىلەيدۇ. ئىككى ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار ئارىسىدىمۇ مۇشۇنىڭغا ئوخشاش مەسىلە مەۋجۇت بولىدۇ، شۇڭا «ئۈچراشماس تۈز سىزىقلاردىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ» ئۇقۇمىنى كىرگۈزىمىز.

19.1.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، a، b ئىككى ئۆچراشماس تۈز سىزىق بېرىلگەن، بوشلۇقتىكى خالىغان بىر O نۇقتا ئارقىلىق $a' \parallel a$، $b' \parallel b$ لارنى ئۆتكۈزسەك، a' بىلەن b' دىن ھاسىل بولغان تار بۇلۇڭ (ياكى تىك بۇلۇڭ) نى **ئۆچراشماس تۈز سىزىقلار a بىلەن b دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ** (ياكى **ئارا بۇلۇڭ**) دەيمىز.

a' بىلەن b' دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى O نۇقتىنىڭ ئورنى بىلەن مۇناسىۋەتلىكمۇ؟



19.1.2 ـ رەسىم

ئۆچراشماس تۈز سىزىقلاردىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭلارنى تەتقىق قىلىشتا، پاراللېل يۆتكەش ئارقىلىق ئۆچراشماس تۈز سىزىقلار ئۆزئارا كېسىشىدىغان تۈز سىزىقلارغا ئايلاندۇرۇپلىنىدۇ. بۇ بوشلۇقتىكى شەكىللەرگە دائىر مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىشتىكى بىر خىل ئاساسىي پىكىر يولى، يەنى بوشلۇقتىكى شەكىللەرگە دائىر مەسىلىلەرنى تەكشىلىكتىكى شەكىللەرگە دائىر مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇشتىن ئىبارەت.

ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، O نۇقتىنى ئادەتتە ئىككى ئۆچراشماس تۈز سىزىقلارنىڭ بىرىنىڭ ئۈستىدىن ئېلىشقا بولىدۇ. مەسىلەن، O نۇقتىنى b تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىن ئېلىپ، ئاندىن O نۇقتا ئارقىلىق تۈز سىزىق $a' \parallel a$ نى ئۆتكۈزسەك، a' بىلەن b دىن ھاسىل بولغان تار بۇلۇڭ (ياكى تىك بۇلۇڭ) دەل ئۆچراشماس تۈز سىزىقلار a بىلەن b دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ بولىدۇ.

ئەگەر ئىككى ئۆچراشماس تۈز سىزىقلاردىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ تىك بۇلۇڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ **ئىككى تۈز سىزىقنى ئۆزئارا تىك** دەيمىز. ئۆزئارا تىك بولغان ئىككى ئۆچراشماس تۈز سىزىقلار a بىلەن b نى $a \perp b$ قىلىپ يازىمىز.

ئىزدىنىش

(1) 18.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ نى كۆزىتىڭ، ئۇنىڭ ئىككى قىرى ياتقان تۈز سىزىقلار ئىچىدە ئۆزئارا تىك بولغان ئۆچراشماس تۈز سىزىقلار بارمۇ؟

(2) ئەگەر ئىككى پاراللېل تۈز سىزىقنىڭ بىرى مەلۇم بىر تۈز سىزىققا تىك بولسا، ئۇ ھالدا يەنە بىر تۈز سىزىقمۇ بۇ تۈز سىزىققا تىك بولامدۇ؟

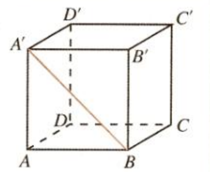
(3) ئوخشاش بىر تۈز سىزىققا تىك بولغان ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولامدۇ؟

3 ـ مىسال. 20.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ بېرىلگەن.

(1) قايسى قىرلار ياتقان تۈز سىزىق BA' تۈز سىزىق بىلەن ئۆچراشماس تۈز سىزىقلار بولىدۇ؟

(2) تۈز سىزىق BA' بىلەن CC' نىڭ ئارا بۇلۇڭى قانچە؟

(3) قايسى قىرلار ياتقان تۈز سىزىقلار AA' تۈز سىزىققا تىك بولىدۇ؟



20.1.2 ـ رەسىم

يېشىش: (1) ئۇچراشماس تۈز سىزىقلارنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، AD، DC، CC'، DD'، $D'C'$، $B'C'$ قىرلار ياتقان تۈز سىزىقلار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا BA' تۈز سىزىق بىلەن ئۇچراشماس تۈز سىزىقلار بولىدۇ.

(2) $BB' // CC'$ دىن بىلىشكە بولىدۇكى، $\angle B'BA'$ ئۇچراشماس تۈز سىزىقلار BA' بىلەن CC' نىڭ ئارا بۇلۇڭى، $\angle B'BA' = 45°$، شۇڭا تۈز سىزىق BA' بىلەن CC' نىڭ ئارا بۇلۇڭى $45°$ بولىدۇ.

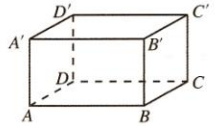
(3) تۈز سىزىق AB، BC، CD، DA، $A'B'$، $B'C'$، $C'D'$، $D'A'$ لار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا AA' تۈز سىزىققا تىك بولىدۇ.

مەشىق

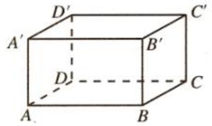
1. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ.

(1) رەسىمدىكىدەك، AA' بولسا پاراللېلېپىپېدنىڭ بىر قىرى، بۇ پاراللېلېپىپېدتا AA' غا پاراللېل بولغان قىردىن جەمئىي ______ تال بار؛

(2) ئەگەر $OA // O'A'$، $OB // O'B'$ بولسا، ئۇ ھالدا $\angle AOB$ بىلەن $\angle A'O'B'$ ______ .



(1(1) مىسال ئۈچۈن)



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ دا، $AB=2\sqrt{3}$، $AD=2\sqrt{3}$، $AA'=2$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) BC بىلەن $A'C'$ دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ قانچە گرادۇس؟

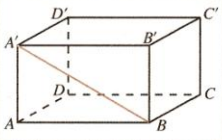
(2) AA' بىلەن BC' دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ قانچە گرادۇس؟

3-1-2 بوشلۇقتىكى تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

مۇلاھىزە ؟

(1) بىر قەلەم ياتقان تۈز سىزىق بىلەن بىر تاپشۇرۇق دەپتەر ياتقان تەكشىلىكنىڭ قانچە خىل ئورۇن مۇناسىۋىتى بولۇشى مۇمكىن؟

(2) 21.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $A'B$ كېسىك ياتقان تۈز سىزىق بىلەن پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ نىڭ ئالتە يېقى ياتقان تەكشىلىكلەرنىڭ قانچە خىل ئورۇن مۇناسىۋىتى بار؟



21.1.2 ـ رەسىم

تۇرمۇشتىكى ئەمەلىي مىساللار ۋە پاراللېلېپىپېد مودېلىنى كۆزىتىش، مۇلاھىزە قىلىش ئارقىلىق، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى پەقەت ۋە پەقەت ئۈچ خىللا بولىدىغانلىقىنى كۆرۈۋالالايمىز:

(1) **تۈز سىزىق تەكشىلىكتە ياتىدۇ** —— چەكسىز كۆپ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە؛

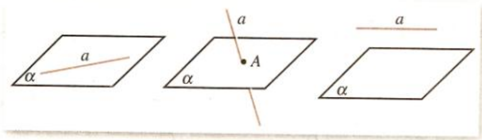
(2) **تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشىدۇ** —— پەقەت ۋە پەقەت بىرلا ئورتاق نۇقتىغا ئىگە؛

(3) **تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىك پاراللېل بولىدۇ** —— ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس.

تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش ياكى پاراللېل بولۇش ئەھۋالىرىنى ئومۇملاشتۇرۇپ **تۈز سىزىق تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا ياتىدۇ** دەيمىز.

22.1.2 ـ رەسىمدە تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئۈچ خىل ئورۇن مۇناسىۋىتى كۆرسىتىلگەن.

ئومۇمەن، a تۈز سىزىق α تەكشىلىكتە ياتسا، a تۈز سىزىقنى α تەكشىلىكنى ئىپادىلەيدىغان پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ ئىچىگە سىزىش كېرەك؛ a تۈز سىزىق α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا ياتسا، a تۈز سىزىقنى ياكى ئۇنىڭ بىر قىسمىنى α تەكشىلىكنى ئىپادىلەيدىغان پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ سىرتىغا سىزىش كېرەك.



22.1.2 ـ رەسىم

a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك A نۇقتىدا ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇ

$$a \cap \alpha = A$$

قىلىپ يېزىلىدۇ؛ a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك پاراللېل بولسا، ئۇ تۆۋەندىكىدەك يېزىلىدۇ

$$a \parallel \alpha .$$

4 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ھۆكۈملەر ئىچىدە توغرا بولغانلىرىنىڭ سانى (　)

① ئەگەر l تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىكى چەكسىز كۆپ نۇقتىلار α تەكشىلىكتە ياتمىسا، ئۇ ھالدا $l \parallel \alpha$ بولىدۇ.

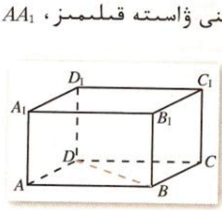
② ئەگەر l تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا l تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر تۈز سىزىق ھامان ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

③ ئەگەر ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق ئىچىدىكى بىر تۈز سىزىق بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا يەنە بىر تۈز سىزىقمۇ بۇ تەكشىلىككە پاراللېل بولىدۇ.

④ ئەگەر l تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا l بىلەن α تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر تۈز سىزىق ھامان ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمايدۇ.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

يېشىش: 23.1.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، پاراللېلېپىپېد مودېلىنى ۋاستە قىلىمىز، AA_1 قىر ياتقان تۈز سىزىق ئۈستىدىكى چەكسىز كۆپ نۇقتىلار $ABCD$ تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا ياتىدۇ، ئەمما AA_1 قىر ياتقان تۈز سىزىق بىلەن $ABCD$ تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشىدۇ، شۇڭا ① ھۆكۈملۈك توغرا ئەمەس؛ A_1B_1 قىر ياتقان تۈز سىزىق $ABCD$ تەكشىلىككە پاراللېل، روشەنكى، A_1B_1 بىلەن BD پاراللېل ئەمەس، شۇڭا ② ھۆكۈملۈك توغرا ئەمەس؛ $A_1B_1 \parallel AB$، A_1B_1 ياتقان تۈز سىزىق $ABCD$ تەكشىلىككە پاراللېل، ئەمما



23.1.2 ـ رەسىم

$ABCD$ تەكشىلىك $\subset AB$ تۈز سىزىق، شۇڭا ③ ھۆكۈملۈك توغرا ئەمەس؛ l بىلەن α تەكشىلىك پاراللېل، شۇڭا l بىلەن α ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس، l بىلەن α تەكشىلىكتىكى بارلىق تۈز سىزىقلارنىڭ ھەممىسى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس، شۇڭا ④ ھۆكۈملۈك توغرا، شۇڭا B نى تاللاش كېرەك.

مەشىق

ئەگەر a تۈز سىزىق α تەكشىلىككە پاراللېل بولمىسا ھەمدە $a \not\subset \alpha$ بولسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى يەكۈنلەر ئىچىدە كۆپچە ئىگە بولىدىغىنى ( ).

(A) α تەكشىلىكتىكى بارلىق تۈز سىزىقلار بىلەن a تۈز سىزىق ئۇچراشماس تۈز سىزىقلار بولىدۇ

(B) α تەكشىلىكتە a تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان تۈز سىزىق مەۋجۇت ئەمەس

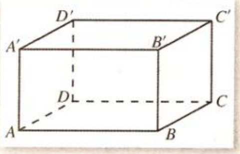
(C) α تەكشىلىكتە a تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان بىردىنبىر تۈز سىزىق مەۋجۇت

(D) α تەكشىلىكتىكى بارلىق تۈز سىزىقلار a تۈز سىزىق بىلەن ئۆزئارا كېسىشىدۇ

4-1-2 تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

مۇلاھىزە ؟

(1) ئىككى كىتابنى ئىككى تەكشىلىك دەپ قاراپ، ئۇلارنى يۇقىرى ـ تۆۋەن، ئوڭ ـ سولغا يۆتكەپ ۋە ئايلاندۇرساق، ئۇلار ئارىسىدا قانچە خىل ئورۇن مۇناسىۋىتى بولىدۇ؟



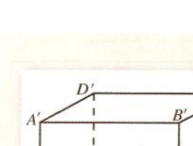
24.1.2 ـ رەسىم

(2) 24.1.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ نىڭ ئالتە يېقى ئىچىدىكى ھەر ئىككى ياق ئارىسىدا قانچە خىل ئورۇن مۇناسىۋىتى بار؟

تۇرمۇشتىكى ئەمەلىي مىساللار ۋە پاراللېلېپىپېد مودېلىنى كۆزىتىش، مۇلاھىزە قىلىش ئارقىلىق، ئىككى تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى پەقەت ۋە پەقەت ئىككى خىللا بولىدىغانلىقىنى كۆرۈۋالايمىز:

(1) **ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا پاراللېل** —— ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس؛

(2) **ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشىدۇ** —— ئورتاق بىر تۈز سىزىققا ئىگە.



25.1.2 ـ رەسىم

ئۆزئارا پاراللېل ئىككى تەكشىلىكنى سىزغاندا، تەكشىلىكنى ئىپادىلەيدىغان ئىككى پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ ماس تەرەپلىرىنى پاراللېل قىلىپ سىزىشقا دىققەت قىلىش كېرەك، 25.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك.

α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىكنىڭ پاراللېل بولۇشى

$$\alpha \parallel \beta$$

قىلىپ يېزىلىدۇ.

ئىزدىنىش

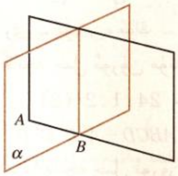
تەكشىلىك α ، β ، تۈز سىزىق a، b لار بېرىلگەن ھەمدە α // β ، $a \subset \alpha$، $b \subset \beta$ بولسا، ئۇ ھالدا a تۈز سىزىق بىلەن b تۈز سىزىق قانداق ئورۇن مۇناسىۋەتتە بولىدۇ؟

مەشىق

ئەگەر ئۈچ تەكشىلىك ئۆزئارا ئىككى ـ ئىككىدىن كېسىشسە، ئۇ ھالدا ئۇلارنىڭ كېسىشىش سىزىقلىرى قانچە تال بولىدۇ؟ شەكلىنى سىزىپ ئۆزىڭىزنىڭ يەكۈنىنى ئىپادىلەڭ.

1.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. تۆۋەندىكى شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغان شەكىلنى سىزىڭ:

$$\alpha \cap \beta = l,\ AB \subset \alpha,\ CD \subset \beta,\ AB // l,\ CD // l.$$

2. رەسىم بېرىلگەن، تۆۋەندىكى تەلەپلەرگە ئاساسەن، تۇسۇۋېلىنغان قىسمىنى ئۈزۈك سىزىقتا ئۆزگەرتىڭ:

(1) AB بولسا α تەكشىلىك تەرىپىدىن تۇسۇۋېلىنمىغان؛

(2) AB بولسا α تەكشىلىك تەرىپىدىن تۇسۇۋېلىنغان

3. تۆۋەندىكى ھۆكۈملەرنىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ، توغرا بولسا تىرناق ئىچىگە «✓» بەلگىسىنى، خاتا بولسا «×» بەلگىسىنى قويۇڭ.

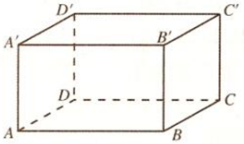
(1) تراپېتسىيە بىر تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ. ( )

(2) چەمبەر مەركىزى بىلەن چەمبەر ئۈستىدىكى ئىككى نۇقتا بىر تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ. ( )

(3) a، b، c، d تۆت تۈز سىزىق بېرىلگەن، ئەگەر a // b، b // c، c // d بولسا، ئۇ ھالدا a // d بولىدۇ. ( )

(4) a، b ئىككى تۈز سىزىق ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمىسا، ئۇ ھالدا a بىلەن b ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار بولىدۇ. ( )

(5) a، b ئىككى تۈز سىزىق، α ، β ئىككى تەكشىلىك بېرىلگەن ھەمدە $a \subset \alpha$، $b \subset \beta$ بولسا، ئۇ ھالدا a بىلەن b ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار بولىدۇ. ( )



(4(2) مىسال ئۈچۈن)

4. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ.

(1) a، b، c ئۈچ تۈز سىزىق ھەمدە $a // b$، a بىلەن c نىڭ ئارا بۇلۇڭى θ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا b بىلەن c نىڭ ئارا بۇلۇڭى ____ بولىدۇ؛

(2) رەسىمدىكىدەك، AA' پاراللېلېپىپېدنىڭ بىر قىرى بولسا، بۇ پاراللېلېپىپېدتا AA' غا تىك بولغان قىردىن جەمئىي ____ تال بار؛

(3) ئەگەر a، b لار ئۈچىراشماس تۈز سىزىقلار بولسا ھەمدە c تۈز سىزىق بىلەن a، b نىڭ ھەر ئىككىسى ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇ ھالدا بۇ ئۈچ تۈز سىزىق ئىچىدىكى ئىككى تۈز سىزىق بەلگىلىگەن تەكشىلىكتىن جەمئىي ____ دانە بار.

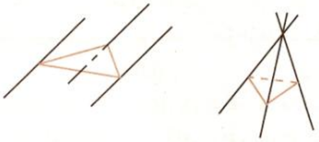
(4) ئەگەر بىر تۈز سىزىق ئىككى پاراللېل تەكشىلىكنىڭ بىرىگە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىق بىلەن يەنە بىر تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ____________ بولىدۇ.

(5) a، b ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ئۆزئارا كېسىشىدىغانلىقى ھەمدە a تۈز سىزىقنىڭ α تەكشىلىككە پاراللېل ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا b بىلەن α نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ____ بولىدۇ.

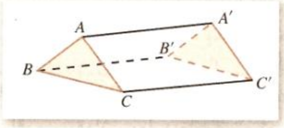
(6) a، b تۈز سىزىقنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا پاراللېلېپىپېدنىڭ ئۆزئارا قوشنا ئىككى يېقىنىڭ دىئاگونالللىرى ياتقان تۈز سىزىقلار دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا a بىلەن b نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ____ بولىدۇ.

5. ئەگەر بىر تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولغان ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ھەر ئىككىسى بىلەن كېسىشسە، ئۇ ھالدا بۇ ئۈچ تۈز سىزىق تەكشىلىكداش بولامدۇ؟

6. رەسىمدىكىدەك، AA'، BB'، CC' لار تەكشىلىكداش ئەمەس ھەمدە $AA' // BB'$، $AA' = BB'$، $BB' // CC'$، $BB' = CC'$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.



(7 ـ مىسال ئۈچۈن)



(6 ـ مىسال ئۈچۈن)

7. رەسىمدىكىدەك، ئۈچ تۈز سىزىق ئىككى ـ ئىككىدىن ئۆزئارا پاراللېل ھەمدە تەكشىلىكداش ئەمەس، ھەرئىككى تۈز سىزىق بىر تەكشىلىكنى بەلگىلىسە، جەمئىي قانچە تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ؟ ئەگەر ئۈچ تۈز سىزىق بىر نۇقتىدا كېسىشسە، ئۇلار ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچە تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ؟

8. كۇبنىڭ ھەرقايسى ياقلىرى ياتقان تەكشىلىكلەر بوشلۇقنى قانچە بۆلەككە بۆلىدۇ؟

B گۇرۇپپا

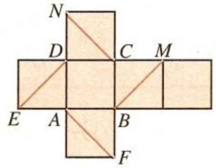
1. توغرا جاۋابنى تاللاڭ.

(1) رەسىمدىكىسى كۇبنىڭ تەكشىلىكتىكى يېيىلمىسى بولسا، ئۇ ھالدا بۇ كۇبتا:

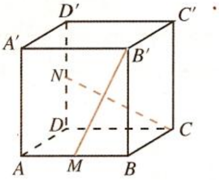
① BM بىلەن ED پاراللېل. ② CN بىلەن BE ئۈچىراشماس تۈز سىزىقلار.

③ CN بىلەن BM دىن 60° لۇق بۇلۇڭ ھاسىل بولىدۇ. ④ DM بىلەن BN ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار.
يۇقىرىدىكى تۆت ھۆكۈملۈكتە، توغرا بولغانلىرىنىڭ رەت تەرتىپى ( )

(A) ①②③ (B) ②④ (C) ③④ (D) ②③④



(1(1) مەسىلە ئۈچۈن)



(1(2) مەسىلە ئۈچۈن)

(2) رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ دا، AB نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M، DD' نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى N بولسا، ئۇ ھالدا ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار $B'M$ بىلەن CN دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ ( )

(A) 0° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

(3) تۆۋەندىكى ئۈچ ھۆكۈملۈك بېرىلگەن:

① ئەگەر ئىككى تۈز سىزىق بىلەن ئۈچىنچى تۈز سىزىقتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭلار ئۆزئارا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

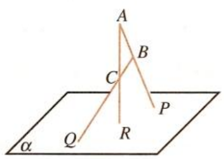
② ئەگەر ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ھەر ئىككىسى ئۈچىنچى بىر تۈز سىزىققا تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

③ ئەگەر ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ھەر ئىككىسى ئۈچىنچى بىر تۈز سىزىققا پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

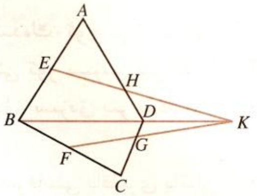
بۇنىڭ ئىچىدە توغرا بولمىغان ھۆكۈملۈكنىڭ سانى ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D)3

2. رەسىمدىكىدەك، $\triangle ABC$ نىڭ α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا، $AB \cap \alpha = P$، $BC \cap \alpha = Q$، $AC \cap \alpha = R$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، P، Q، R ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.



(2 ـ مەسىلە ئۈچۈن)



(3 ـ مەسىلە ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ دا، E، F لار ئايرىم ـ ئايرىم AB ۋە CB نىڭ ئۈستىدىكى نۇقتىلار، G، H لار ئايرىم ـ ئايرىم CD ۋە AD نىڭ ئۈستىدىكى نۇقتىلار ئىكەنلىكى ھەمدە EH بىلەن FG نىڭ K نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى بېرىلگەن. EH، BD، FG ئۈچ تۈز سىزىقنىڭ ئوخشاش بىر نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

2-2 تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش ۋە ئۇلارنىڭ خۇسۇسىيىتى

1-2-2 تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش

تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىدە، پاراللېللىق بولسا بىر خىل ئىنتايىن مۇھىم مۇناسىۋەت. ئۇنىڭ قوللىنىلىشى كۆپ بولۇپلا قالماي، ئۇ يەنە تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىنى ئۆگىنىشنىڭ ئاساسى.

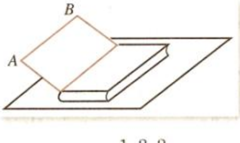
تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا قانداق ھۆكۈم قىلىش كېرەك؟

ئېنىقلىمىغا ئاساسەن، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېل ياكى پاراللېل ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىشتا، پەقەت تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولۇش ـ بولماسلىقىغا ھۆكۈم قىلساقلا بولىدۇ. ئەمما، تۈز سىزىق چەكسىز سوزۇلغان، تەكشىلىك چەكسىز كېڭەيگەن بولىدۇ، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەسلىكىگە قانداق كاپالەتلىك قىلغىلى بولىدۇ؟

تۇرمۇشتا، ئىشىك قانىتىنىڭ ئىككى قىرى پاراللېل ئىكەنلىكىنى بىلىمىز. ئىشىك قانىتى بىر قىرىنى بويلاپ ئايلانغاندا، يەنە بىر قىرى ھامان ئىشىك كېشىكى ياتقان تەكشىلىك بىلەن ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمايدۇ، بۇ چاغدا ئىشىك قانىتىنىڭ ئايلانغان بىر قىرى بىلەن ئىشىك كېشىكى ياتقان تەكشىلىك كىشىلەرگە پاراللېللىق تۇيغۇسىنى بېرىدۇ.

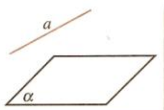
كۆزىتىش

1.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر پارچە كىتابنى ئۈستەل يۈزىگە قويۇپ، ئۇنىڭ مۇقاۋىسىنى ئۆرۈسەك، مۇقاۋىنىڭ AB قىرى ياتقان تۈز سىزىق بىلەن ئۈستەل يۈزى ياتقان تەكشىلىك قانداق ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ئىگە بولىدۇ؟

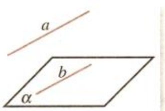


1.2.2 ـ رەسىم

2.2.2 ـ رەسىمدە a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك پاراللېلمۇ؟



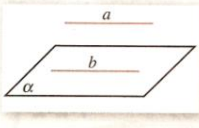
2.2.2 ـ رەسىم



3.2.2 ـ رەسىم

3.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئەگەر α تەكشىلىكتىكى b تۈز سىزىق بىلەن a تۈز سىزىق پاراللېل بولسا، ئۇ هالدا a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك قانداق ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ئىگە بولىدۇ؟ a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا كاپالەتلىك قىلغىلى بولامدۇ؟

ئىزدىنىش



4.2.2 ـ رەسىم

4.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكتىكى b تۈز سىزىق پاراللېل.

(1) بۇ ئىككى تۈز سىزىق تەكشىلىكداشمۇ؟

(2) a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشەمدۇ؟

ئىزدىنىش ئارقىلىق، a تۈز سىزىق بىلەن b تۈز سىزىقنىڭ تەكشىلىكداشلىقىنى، a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكنىڭ كېسىشمەيدىغانلىقىنى، a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكنىڭ پاراللېل بولىدىغانلىقىنى بايقايمىز.

ئومۇمەن، تۆۋەندىكىدەك يەكۈننى ئىسپاتلىيالايمىز.

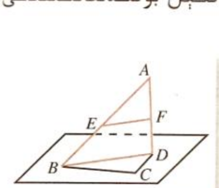
تېئورېما: تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى بىر تۈز سىزىق بۇ تەكشىلىكتە ياتقان بىر تۈز سىزىققا پاراللېل بولسا، ئۇ هالدا بۇ تۈز سىزىق ئاشۇ تەكشىلىككە پاراللېل بولىدۇ.

بۇ تېئورېما بىزگە شۇنى بىلدۇرىدۇكى، تۈز سىزىقلارنىڭ پاراللېللىقى ئارقىلىق تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. بۇ بوشلۇقتىكى ئورۇن مۇناسىۋەتلىرىنى بىر تەرەپ قىلىشتا دائىم قوللىنىلىدىغان بىر خىل ئۇسۇلدۇر، يەنى تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىق مۇناسىۋىتىنى (بوشلۇقتىكى مەسىلىلەر) تۈز سىزىقلارنىڭ پاراللېللىق مۇناسىۋىتىگە (تەكشىلىكتىكى مەسىلىلەر) ئايلاندۇرۇشتىن ئىبارەت.

يۇقىرىدىكى تېئورېما ئادەتتە تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا هۆكۈم قىلىش تېئورېمىسى دەپ ئاتىلىدۇ، ئۇنى بەلگە ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$a \not\subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha .$$

1 ـ مىسال. بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىكنىڭ ئۆزئارا قوشنا ئىككى تەرىپىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىلىرىنى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىق قالغان ئىككى تەرىپىدىن ئۆتكەن تەكشىلىككە پاراللېل بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.



5.2.2 ـ رەسىم

بېرىلگىنى: 5.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ دا، E، F لار ئايرىم ـ ئايرىم هالدا AB، AD لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى.

ئىسپات تەلىپى: $EF \parallel$ تەكشىلىك BCD.

ئىسپات: B بىلەن D نى تۇتاشتۇرىمىز.

چۈنكى $AE=EB$، $AF=FD$،

شۇڭا $EF \parallel BD$ (ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئوتتۇرا سىزىقى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت).

چۈنكى BCD تەكشىلىك $EF \not\subset$، BCD تەكشىلىك $BD \subset$،

تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسىدىن تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$EF \parallel$ تەكشىلىك BCD.

بۇنىڭدىن كېيىن بېرىلگەن بىر تۈز سىزىق بىلەن بىر تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىنى ئىسپاتلاشتا، پەقەت بۇ تەكشىلىك ئىچىدىن بېرىلگەن تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان بىر تۈز سىزىقنى تېپىپ چىقساقلا، بېرىلگەن تۈز سىزىق بىلەن بۇ تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلغىلى بولىدۇ.

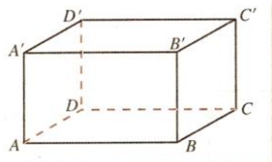
مەشىق

1. رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ دا،

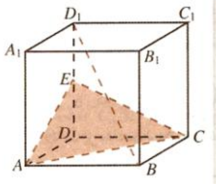
(1) AB بىلەن پاراللېل بولغان تەكشىلىك ____________؛

(2) AA' بىلەن پاراللېل بولغان تەكشىلىك ____________؛

(3) AD بىلەن پاراللېل بولغان تەكشىلىك ____________.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، E بولسا DD_1 نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، BD_1 بىلەن AEC تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ ۋە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

2-2-2 تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش

كۆزىتىش

ئۈچبۇلۇڭلۇق سىزغۇچنىڭ بىر تەرىپى ياتقان تۈز سىزىق ئۈستەل يۈزىگە پاراللېل بولسا، بۇ ئۈچبۇلۇڭلۇق سىزغۇچ ياتقان تەكشىلىك بىلەن ئۈستەل يۈزى پاراللېل بولامدۇ؟ ئۈچبۇلۇڭلۇق سىزغۇچنىڭ ئىككى تەرىپى ياتقان تۈز سىزىق ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا ئۈستەل يۈزى بىلەن پاراللېل بولسا، ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟

تۆۋەندە تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش مەسىلىسىنى مۇزاكىرە قىلىمىز.

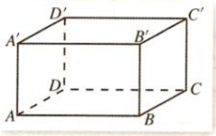
ئېنىقلىمىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىشنىڭ ئاچقۇچى ئۇلارنىڭ ئورتاق نۇقتىسى بار - يوقلۇقىغا ھۆكۈم قىلىشتىن ئىبارەت. ئەگەر بىر تەكشىلىكتە ياتقان بارلىق تۈز سىزىقلار يەنە بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تەكشىلىك چوقۇم ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ. ئەكسىچە بولغاندا، بۇ ئىككى تەكشىلىك ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ، مۇشۇنداق بولغاندا بىر تەكشىلىكتىكى بۇ ئورتاق نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق يەنە بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولمايدۇ.

يۇقىرىدىكى بايانلارغا ئاساسەن، ئىككى تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىق مەسىلىسىنى بىر تەكشىلىكتە ياتقان تۈز سىزىق بىلەن يەنە بىر تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىق مەسىلىسىگە ئايلاندۇرۇۋالغىلى بولىدۇ. ئەمەلىيەتتە، ئىككى تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىشتا بىر تەكشىلىكتىكى بارلىق تۈز سىزىقلارنىڭ يەنە بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولۇشىغا ھۆكۈم قىلىش ھاجەتسىز.

ئىزدىنىش

(1) β تەكشىلىكتە ياتقان بىر تۈز سىزىق α تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا α ، β لار پاراللېل بولامدۇ؟

(2) β تەكشىلىكتە ياتقان ئىككى تۈز سىزىق α تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا α ، β لار پاراللېل بولامدۇ؟



6.2.2 - رەسىم

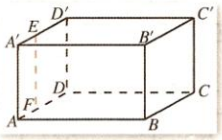
ئىزدىنىش (1) دىكى α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىكنىڭ پاراللېل بولۇشى ناتايىن. 6.2.2 - رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد مودېلىدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، $A'ADD'$ تەكشىلىكتىكى AA' تۈز سىزىق $DCC'D'$ تەكشىلىككە پاراللېل، ئەمما $A'ADD'$ تەكشىلىك بىلەن $DCC'D'$ تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشىدۇ.

ئىزدىنىش (2) گە نىسبەتەن، ئىككى خىل ئەھۋالغا بۆلۈپ تەھلىل قىلىمىز.

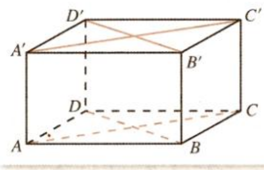
ئەگەر β تەكشىلىكتىكى ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل تۈز سىزىقلار بولسا، α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىكنىڭ پاراللېل بولۇشى ناتايىن. 7.2.2 - رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد مودېلىدىن پايدىلانساق، $A'ADD'$ تەكشىلىكتە AA' غا پاراللېل بولغان EF تۈز سىزىققا ئىگە بولىمىز، روشەنكى، AA' بىلەن EF نىڭ ھەر ئىككىسى $DCC'D'$ تەكشىلىككە پاراللېل، ئەمما بۇ ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق ياتقان $A'ADD'$ تەكشىلىك بىلەن $DCC'D'$ تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشىدۇ.

ئەگەر β تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكەن ئىككى تۈز سىزىق α تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟

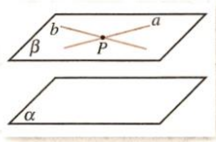
8.2.2 - رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد مودېلىدىن پايدىلانساق، $ABCD$ تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكەن ئىككى تۈز سىزىق AC، BD لار ئايرىم - ئايرىم ھالدا $A'B'C'D'$ تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكەن ئىككى تۈز سىزىق $A'C'$، $B'D'$ غا پاراللېل بولىدۇ، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئۆزئارا كېسىشكەن بۇ ئىككى تۈز سىزىق AC، BD نىڭ ھەر ئىككىسى $A'B'C'D'$ تەكشىلىككە پاراللېل بولىدۇ. بۇ چاغدا، $ABCD$ تەكشىلىك $A'B'C'D'$ تەكشىلىككە پاراللېل بولىدۇ.



7.2.2 ـ رەسىم



8.2.2 ـ رەسىم



9.2.2 ـ رەسىم

ئومۇمەن، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىشنىڭ تۆۋەندىكى تېئورېمىسىغا ئىگە بولىمىز (9.2.2 ـ رەسىم).

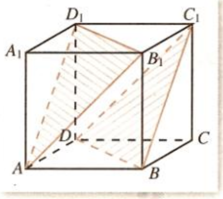
تېئورېما: بىر تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق يەنە بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

يۇقىرىدىكى تېئورېما ئادەتتە تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسى دەپ ئاتىلىدۇ، ئۇ بىزگە تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىدىن تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدىغانلىقىنى ئېيتىپ بېرىدۇ.

تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسىنى بەلگە ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$a \subset \beta,\ b \subset \beta,\ a \cap b = P,\ a \parallel \alpha,\ b \parallel \alpha \Rightarrow \beta \parallel \alpha\ .$$

2 ـ مىسال. كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ بېرىلگەن (10.2.2 ـ رەسىم)، تەكشىلىك AB_1D_1 // تەكشىلىك C_1BD بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.



10.2.2 ـ رەسىم

ئىسپات: چۈنكى $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ كۇب،

شۇڭا $D_1C_1 \parallel A_1B_1$ ، $D_1C_1=A_1B_1$.

يەنە $AB \parallel A_1B_1$ ، $AB=A_1B_1$ ،

شۇڭا $D_1C_1 \parallel AB$ ، $D_1C_1=AB$ ،

شۇڭا D_1C_1BA پاراللېل تۆت تەرەپلىك.

شۇڭا $D_1A \parallel C_1B$.

يەنە $D_1A \not\subset$ تەكشىلىك C_1BD ، $C_1B \subset$ تەكشىلىك C_1BD ،

تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسىدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$D_1A \parallel$ تەكشىلىك C_1BD,

ئوخشاش قائىدە بويىچە

$D_1B_1 \parallel$ تەكشىلىك C_1BD,

يەنە

$$D_1A \cap D_1B_1 = D_1,$$

شۇڭا

تەكشىلىك $AB_1D_1 \parallel$ تەكشىلىك C_1BD .

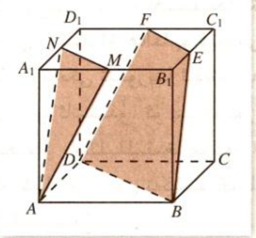
مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ، توغرا بولغانلىرىنىڭ سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ، خاتا بولغانلىرىنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

(1) تەكشىلىك α، β ۋە تۈز سىزىق m، n لار بېرىلگەن، ئەگەر $m \subset \alpha$، $n \subset \alpha$، $m \parallel \beta$، $n \parallel \beta$ بولسا، ئۇ ھالدا $\beta \parallel \alpha$ بولىدۇ.

(2) α تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا پاراللېل بولمىغان ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ھەر ئىككىسى يەنە بىر β تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا $\beta \parallel \alpha$ بولىدۇ.

2. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، M، N، E، F لار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا A_1B_1، A_1D_1، B_1C_1، C_1D_1 قىرلارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، $EFDB$ تەكشىلىك $\parallel AMN$ تەكشىلىك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىكنىڭ پاراللېل بولۇشىنىڭ شەرتى ( )

(A) α تەكشىلىكتە ياتقان چەكسىز كۆپ تۈز سىزىقلارنىڭ ھەممىسى β تەكشىلىككە پاراللېل بولىدۇ

(B) $a \parallel \alpha$ تۈز سىزىق، $a \parallel \beta$ تۈز سىزىق ھەمدە a تۈز سىزىق α تەكشىلىكتە ياتمايدۇ، شۇنداقلا β تەكشىلىكتىمۇ ياتمايدۇ

(C) $a \subset \alpha$ تۈز سىزىق، $b \subset \beta$ تۈز سىزىق ھەمدە $a \parallel \beta$، $b \parallel \alpha$

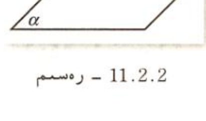
(D) α تەكشىلىكتىكى ھەرقانداق بىر تۈز سىزىق β تەكشىلىككە پاراللېل

3-2-2 تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت

مۇلاھىزە؟

(1) ئەگەر بىر تۈز سىزىق بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىق بىلەن بۇ تەكشىلىكتە ياتقان تۈز سىزىقلار قانداق ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ئىگە بولىدۇ؟

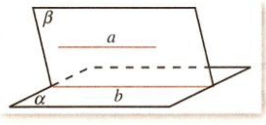
(2) سىنىپتىكى كۈن نۇرلۇق لامپا ياتقان تۈز سىزىق يەر يۈزىگە پاراللېل، كۈن نۇرلۇق لامپا ياتقان تۈز سىزىققا پاراللېل قىلىپ يەر يۈزىگە بىر تۈز سىزىقنى قانداق سىزىش كېرەك؟



11.2.2 ـ رەسىم

11.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىق ئېنىقلىمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئەگەر a تۈز سىزىق α تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا a بىلەن α ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمايدۇ، يەنى a نىڭ ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى α تەكشىلىكتە ياتمايدۇ، α تەكشىلىكتىكى ھەرقانداق بىر تۈز سىزىق بىلەن a تۈز سىزىقنىڭ ئورتاق نۇقتىسى بولمايدۇ. شۇڭا، α تەكشىلىكتىكى تۈز سىزىق بىـ-

لەن α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى a تۈز سىزىق پەقەت ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار ياكى پاراللېل تۈز سىزىقلار بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، قانداق شەرت ئاستىدا α تەكشىلىكتىكى تۈز سىزىق بىلەن a تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ؟



12.2.2 ـ رەسىم

چۈنكى a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكتىكى ھەرقانداق بىر تۈز سىزىق ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس، شۇڭا a تۈز سىزىقتىن ئۆتكەن مەلۇم بىر تەكشىلىك، ئەگەر α تەكشىلىك بىلەن كېسىشسە، ئۇ ھالدا a تۈز سىزىق بۇ كېسىشىش سىزىقىغا پاراللېل بولىدۇ.

تۆۋەندە بىز بۇ يەكۈننى ئىسپاتلايمىز.

بېرىلگىنى: 12.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $a /\!/ \alpha$، $a \subset \beta$، $\alpha \cap \beta = b$.

ئىسپات تەلىپى: $a /\!/ b$.

ئىسپات: چۈنكى $\alpha \cap \beta = b$، شۇڭا $b \subset \alpha$.

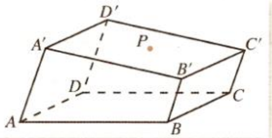
چۈنكى $a /\!/ \alpha$، شۇڭا a بىلەن b ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس.

چۈنكى $a \subset \beta$، $b \subset \beta$، شۇڭا $a /\!/ b$ بولىدۇ.

بۇنىڭدىن بىز تۆۋەندىكى تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسىغا ئىگە بولىمىز:

تېئورېما: ئەگەر بىر تۈز سىزىق بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىقتىن ئۆتكەن خالىغان بىر تەكشىلىك بىلەن ئاشۇ تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش سىزىقى بۇ تۈز سىزىققا پاراللېل بولىدۇ.

تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسى تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ئېچىگە تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقى يوشۇرۇنغانلىقىنى ئېچىپ بېرىدۇ. تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىدىن تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقىغا ئىگە بولغىلى بولىدۇ، بۇ بىزگە پاراللېل سىزىقلارنى سىزىشنىڭ بىر خىل مۇھىم ئۇسۇلىنى كۆرسىتىپ بەردى. بۇ پاراگرافنىڭ بېشىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان مەسىلىگە نىسبەتەن، بىز پەقەت بۇ كۆن نۇرلۇق لامپىنىڭ ئىككى ئۇچىدىن يەر يۈزىگە ئىككى پاراللېل تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، بۇ ئىككى پاراللېل تۈز سىزىقنىڭ يەر يۈزى بىلەن كېسىشىش نۇقتىسىنى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىق دەل بۇ كۆن نۇرلۇق لامپىغا پاراللېل بولغان تۈز سىزىق بولىدۇ.



13.2.2 ـ رەسىم

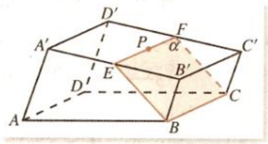
3 ـ مىسال. 13.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر پارچە ياغاچ ماتېرىيالى بار بولۇپ، ئۇنىڭ BC قىرىنىڭ $A'C'$ تەكشىلىككە پاراللېل ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) بۇ ياغاچ ماتېرىيالىنى $A'C'$ تەكشىلىكتىكى بىر P نۇقتا ۋە BC قىر ئارقىلىق ھەرىلەشكە توغرا كەلسە، ھەرىلەش سىزىقىنى قانداق سىزىش كېرەك؟

(2) سىزىلغان سىزىق بىلەن AC تەكشىلىك قانداق ئورۇن مۇناسىۋەتكە ئىگە؟

تەھلىل: ياغاچ ماتېرىيالىنى $A'C'$ تەكشىلىكتىكى بىر P نۇقتا ۋە BC قىر ئارقىلىق ھەرىلەش ئەمەلىيەتتە، BC ۋە BC نىڭ سىرتىدىكى بىر P نۇقتا ئارقىلىق كەسمە ئۆتكۈزۈپ، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش سىزىقىنى تېپىشتىن ئىبارەت. تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسى ۋە 4 ـ ئاكسىئوما، 2 ـ ئاكسىئومىلاردىن پايدىلىنىپ سىزىپ

چىقىمىز.



14.2.2 ـ رەسىم

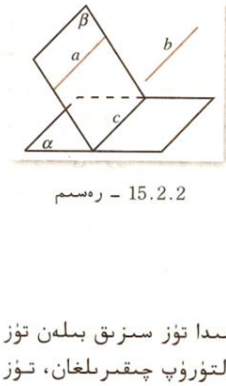
يېشىش: (1) 14.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $A'C'$ تەكشىلىكتىكى P نۇقتا ئارقىلىق $EF // B'C'$ بولىدىغان قىلىپ، EF تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $A'B'$، $C'D'$ قىرلار بىلەن E، F نۇقتىلاردا كېسىشىدۇ. B بىلەن E نى، C بىلەن F نى تۇتاشتۇرساق، ئۇ ھالدا EF، BE، CF لار دەل بىز سىزماقچى بولغان سىزىقلار بولىدۇ.

(2) چۈنكى BC قىر $A'C'$ تەكشىلىككە پاراللېل، BC' تەكشىلىك بىلەن $A'C'$ تەكشىلىك $B'C'$ تۈز سىزىقتا كېسىشىدۇ، شۇڭا $BC // B'C'$. (1) دىن بىلىشكە بولىدۇكى $EF // B'C'$، شۇڭا $EF // BC$، شۇنىڭ ئۈچۈن

$$\left.\begin{array}{l} EF // BC \\ EF \not\subset \text{تەكشىلىك } AC \\ BC \subset \text{تەكشىلىك } AC \end{array}\right\} \Rightarrow EF // \text{تەكشىلىك } AC.$$

روشەنكى، BE، CF نىڭ ھەر ئىككىسى AC تەكشىلىك بىلەن كېسىشىدۇ.

4 ـ مىسال. تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى ئىككى پاراللېل تۈز سىزىقنىڭ بىرى بۇ تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، يەنە بىرىنىڭمۇ بۇ تەكشىلىككە پاراللېل بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.



15.2.2 ـ رەسىم

15.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، a، b تۈز سىزىقلار، α تەكشىلىك ھەمدە $a // b$، $a // \alpha$، a، b لار α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدا ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

ئىسپات تەلىپى: $b // \alpha$.

ئىسپات: a ئارقىلىق β تەكشىلىكنى ئۆتكۈزسەك، ئۇ α تەكشىلىك بىلەن c تۈز سىزىقتا كېسىشىدۇ.

چۈنكى $a // \alpha$، $a \subset \beta$، $\alpha \cap \beta = c$، شۇڭا $a // c$.

چۈنكى $a // b$، شۇڭا $b // c$.

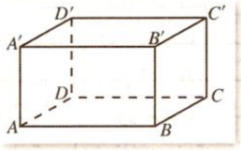
چۈنكى $c \subset \alpha$، $b \not\subset \alpha$، شۇڭا $b // \alpha$ بولىدۇ.

تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسىدا تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقىدىن تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسىدا تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىدىن تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقى كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان. بۇ خىل تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ۋە تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنىڭ ئۆزئارا بىر ـ بىرىگە ئايلاندۇرۇلۇشى ستېرېئومېترىيىدىكى بىر خىل مۇھىم پىكىر قىلىش ئۇسۇلىدۇر.

4-2-2 تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت

مۇلاھىزە ؟

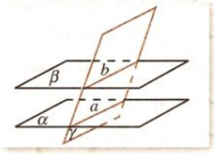
ئەگەر ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بىر تەكشىلىكتىكى تۈز سىزىقلار بىلەن يەنە بىر تەكشىلىكتىكى تۈز سىزىقلار قانداق ئورۇن مۇناسىۋەتتە ئىگە بولىدۇ؟



16.2.2 ـ رەسىم

16.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد مودېلىدىن كۆرۈۋالالايمىزكى، $B'D'$ ياتقان $A'C'$ تەكشىلىك بىلەن AC تەكشىلىك ئۆزئارا پاراللېل، شۇڭا $B'D'$ بىلەن AC تەكشىلىكنىڭ ئورتاق نۇقتىسى يوق. يەنى $B'D'$ بىلەن AC تەكشىلىكتىكى بارلىق تۈز سىزىقلارنىڭ ئورتاق نۇقتىسى يوق. شۇڭا، $B'D'$ بىلەن AC تەكشىلىكتىكى بارلىق تۈز سىزىقلار ياكى ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار بولىدۇ ياكى پاراللېل تۈز سىزىقلار بولىدۇ.

AC تەكشىلىكتىكى قايسى تۈز سىزىقلار $B'D'$ تۈز سىزىققا پاراللېل بولىدۇ؟ ئۇلارنى قانداق تېپىش كېرەك؟ ئەمەلىيەتتە، AC تەكشىلىكتىكى تۈز سىزىقلار پەقەت $B'D'$ تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكداش بولسىلا كۇپايە.



17.2.2 ـ رەسىم

5 ـ مىسال. بېرىلگىنى: 17.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، α ، β ، γ تەكشىلىكلەر $\alpha // \beta$ ، $\alpha \cap \gamma = a$ ، $\beta \cap \gamma = b$ لارنى قانائەتلەندۈرىدۇ.

ئىسپات تەلىپى: $a // b$.

ئىسپات: چۈنكى $\alpha \cap \gamma = a$ ، $\beta \cap \gamma = b$ ،

شۇڭا $a \subset \alpha$ ، $b \subset \beta$.

چۈنكى $\alpha // \beta$ ،

شۇڭا a ، b لار ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس،

چۈنكى a ، b لار ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتىدۇ،

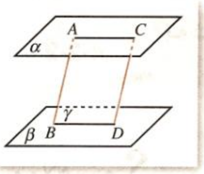
شۇڭا $a // b$ بولىدۇ.

بىز بۇ يەكۈننى ئىككى تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسى قىلىۋالىمىز.

تېئورېما: ئەگەر ئىككى پاراللېل تەكشىلىك بىرلا ۋاقىتتا ئۈچىنچى بىر تەكشىلىك بىلەن ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇ ھالدا ئۇلارنىڭ كېسىشىش سىزىقلىرى ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

يۇقىرىدىكى تېئورېما بىزگە شۇنى بىلدۈرىدۇكى، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىدىن تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ.

6 ـ مىسال. ئىككى پاراللېل تەكشىلىك ئارىسىدىكى پاراللېل كېسىكلەرنىڭ ئۆزئارا تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.



18.2.2 ـ رەسىم

بېرىلگىنى: 18.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\alpha \parallel \beta$ ، $AB \parallel CD$ ھەمدە $A \in \alpha$ ، $C \in \alpha$ ، $B \in \beta$ ، $D \in \beta$.

ئىسپات تەلىپى: $AB = CD$.

ئىسپات: $AB \parallel CD$ بولغانلىقتىن AB ، CD لار ئارقىلىق γ تەكشىلىكنى ئۆتكۈزۈشكە بولىدۇ ھەمدە γ تەكشىلىك بىلەن α ، β تەكشىلىكلەر ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا AC ، BD لاردا كېسىشىدۇ.

چۈنكى $\beta \parallel \alpha$ ، شۇڭا $AC \parallel BD$.

شۇڭا، $ABCD$ تۆت تەرەپلىك پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولىدۇ.

شۇڭا $AB = CD$.

ئالدىدىكى مۇزاكىرىلەردىن بىلىۋالالايمىزكى، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىدىن تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىشقىمۇ بولىدۇ، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىق ئېنىقلىمىسى ۋە خۇسۇسىيەت تېئورېمىسىدىن تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى، تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. بۇ، تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىق، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىك، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىك ئارىسىدىكى پاراللېللىق مۇناسىۋىتىنى ئۆزئارا بىر ـ بىرىگە ئايلاندۇرۇشقا بولىدىغانلىقىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئېچىپ بېرىدۇ.

مەشىق

تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ. توغرا بولسا تىرناق ئىچىگە «✓» بەلگىسىنى، خاتا بولسا «×» بەلگىسىنى قويۇڭ.

(1) a ، b ئىككى تۈز سىزىق ھەمدە $a \parallel b$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا a تۈز سىزىق b تۈز سىزىقتىن ئۆتكەن ھەرقانداق بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولىدۇ. ( )

(2) ئەگەر a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك $a \parallel \alpha$ نى قانائەتلەندۈرسە، ئۇ ھالدا a بىلەن α تەكشىلىكتىكى ھەرقانداق بىر تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ. ( )

(3) ئەگەر a ، b تۈز سىزىقلار ۋە α تەكشىلىك $a \parallel \alpha$ ، $b \parallel \alpha$ لارنى قانائەتلەندۈرسە، ئۇ ھالدا $a \parallel b$ بولىدۇ. ( )

(4) ئەگەر a ، b تۈز سىزىقلار ۋە α تەكشىلىك $a \parallel b$ ، $a \parallel \alpha$ ، $b \not\subset \alpha$ لارنى قانائەتلەندۈرسە، ئۇ ھالدا $b \parallel \alpha$ بولىدۇ. ( )

2.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. توغرا جاۋابنى تاللاڭ.

(1) تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەر ئىچىدە خاتا بولغىنى ( ).

(A) ئوخشاش بىر تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان ئىككى تەكشىلىك پاراللېل بولىدۇ

(B) ئوخشاش بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولغان ئىككى تەكشىلىك پاراللېل بولىدۇ

(C) بىر تەكشىلىك بىلەن ئىككى پاراللېل تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇلارنىڭ كېسىشىش سىزىقلىرى ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ

(D) بىر تۈز سىزىق ئىككى پاراللېل تەكشىلىكنىڭ بىرى بىلەن ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇ ھالدا چوقۇم يەنە بىر تەكشىلىك بىلەنمۇ ئۆزئارا كېسىشىدۇ

(2) ئەگەر a تۈز سىزىق α تەكشىلىككە پاراللېل بولمىسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى يەكۈنلەر ئىچىدە كۈچكە ئىگە بولىدىغىنى ( ).

(A) α تەكشىلىكتىكى بارلىق تۈز سىزىقلار بىلەن a تۈز سىزىق ئۇچراشماس تۈز سىزىقلار بولىدۇ

(B) α تەكشىلىكتە a تۈز سىزىق بىلەن پاراللېل بولىدىغان تۈز سىزىق مەۋجۇت ئەمەس

(C) α تەكشىلىكتىكى تۈز سىزىقلارنىڭ ھەممىسى a تۈز سىزىق بىلەن ئۆزئارا كېسىشىدۇ

(D) a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك ئورتاق نۇقتىغا ئىگە

(3) α تەكشىلىك $/\!/$ a تۈز سىزىق، $P \in \alpha$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا P نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە a تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان تۈز سىزىقتىن ( )

(A) پەقەت بىرىلا بار بولۇپ، α تەكشىلىكتە ياتمايدۇ

(B) چەكسىز كۆپ بولۇپ، α تەكشىلىكتە يېتىشى ناتايىن

(C) پەقەت بىرىلا بار بولۇپ، α تەكشىلىكتە ياتىدۇ

(D) چەكسىز كۆپ بولۇپ، چوقۇم α تەكشىلىكتە ياتىدۇ

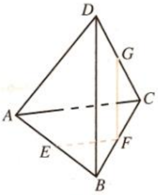
2. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ.

(1) α، β تەكشىلىك، a، b، c تۈز سىزىقلار ھەمدە $a /\!/ b /\!/ c$، $a \subset \alpha$، $b, c \subset \beta$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا α بىلەن β نىڭ مۇناسىۋىتى __________ .

(2) تەكشىلىكتىكى بىر نۇقتا بىلەن تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى بىر نۇقتىنى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىقنىڭ بۇ تەكشىلىكتىكى تۈز سىزىقلار بىلەن بولغان مۇناسىۋىتى __________ .

3. بېرىلگىنى: رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ دا، E، F، G لار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا AB، BC، CD لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى.

ئىسپات تەلىپى: (1) EFG تەكشىلىك $/\!/$ BD؛ (2) EFG تەكشىلىك $/\!/$ AC.



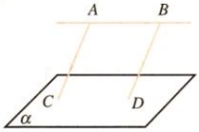
(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

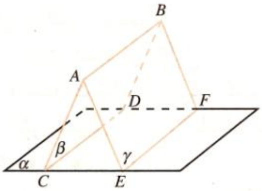
4. رەسىمدىكىدەك، a ، b لار ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار، $a \subset \alpha$ ، ھەمدە $b \,//\, \alpha$ بولىدىغان قىلىپ α تەكشىلىك سىزىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

5. بېرىلگىنى: رەسىمدىكىدەك، $AB \,//\, \alpha$ ، $AC \,//\, BD$ ، $C \in \alpha$ ، $D \in \alpha$.

ئىسپات تەلىپى: $AC = BD$.



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)



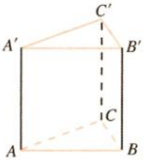
(6 ـ مىسال ئۈچۈن)

6. بېرىلگىنى: رەسىمدىكىدەك، $\alpha \cap \beta = CD$ ، $\alpha \cap \gamma = EF$ ، $\beta \cap \gamma = AB$ ، $AB \,//\, \alpha$.

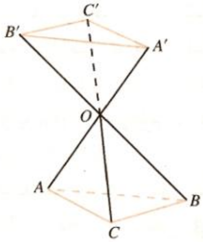
ئىسپات تەلىپى: $CD \,//\, EF$.

7. بېرىلگىنى: رەسىمدىكىدەك، A ، B ، C لار ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا ياتمايدىغان ئۈچ نۇقتا، $AA' \,//\, BB' \,//\, CC'$ ھەمدە $AA' = BB' = CC'$.

ئىسپات تەلىپى: $A'B'C'$ تەكشىلىك $//$ ABC تەكشىلىك.



(7 ـ مىسال ئۈچۈن)



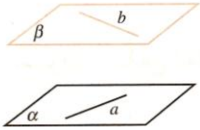
(8 ـ مىسال ئۈچۈن)

8. بېرىلگىنى: رەسىمدىكىدەك، AA' ، BB' ، CC' تۈز سىزىقلار ئۆزئارا O نۇقتىدا كېسىشىدۇ، $AO = A'O$ ، $BO = B'O$ ، $CO = C'O$.

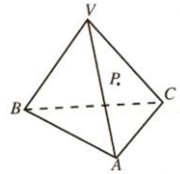
ئىسپات تەلىپى: $A'B'C'$ تەكشىلىك $//$ ABC تەكشىلىك.

B گۇرۇپپا

1. رەسىمدە بىر ياغاچ پارچىسى كۆرسىتىلگەن، P نۇقتا VAC تەكشىلىكتە ياتىدۇ، P نۇقتا ئارقىلىق بۇ ياغاچ پارچىسىنى ھەرىلىسەك، كېسىلگەن كەسمە يۈزنىڭ VB ، AC تۈز سىزىقلارغا پاراللېل بولۇشى ئۈچۈن، سىزىقنى قانداق سىزىش كېرەك؟



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)



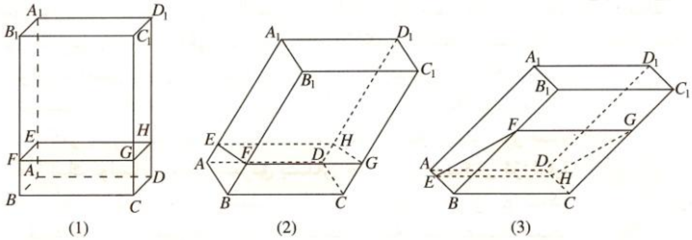
(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. بېرىلگىنى: رەسىمدىكىدەك a ، b لار ئۈچراشماس تۈز سىزىقلار ھەمدە $a \subset \alpha$، $a // \beta$ ، $b \subset \beta$ ، $b // \alpha$.

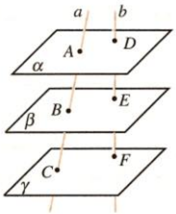
ئىسپات تەلىپى: $\alpha // \beta$.

3. بېرىلگىنى: رەسىمدىكىدەك، $\alpha // \beta // \gamma$ ، a ، b تۈز سىزىقلار ئايرىم ـ ئايرىم α ، β ، γ تەكشىلىكلەر بىلەن A ، B ، C ۋە D ، E ، F نۇقتىلاردا كېسىشىدۇ.

ئىسپات تەلىپى: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكىدەك، سۈزۈك سۇلياۋدىن ياسالغان پاراللېلېپىپېد شەكىللىك قاچا $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ غا سۇ قاچىلانغان، بۇ قاچىنىڭ ئاساسىنىڭ بىر تەرىپى BC نى يەر يۈزىگە مۇقىملاشتۇرۇپ، ئاندىن قاچىنى يانتۇ قىلساق، قاچىنىڭ يانتۇلۇق دەرىجىسىنىڭ ئوخشىماسلىقىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكى بەش ھۆكۈملۈك ئوتتۇرىغا قويۇلغان:

(1) سۇ بار قىسمى باشتىن ـ ئاخىر پرىزما شەكلىدە كۆرۈنىدۇ؛

(2) سۇ يوق قىسمى باشتىن ـ ئاخىر پرىزما شەكلىدە كۆرۈنىدۇ؛

(3) سۇ يۈزى $EFGH$ ياتقان تۆت تەرەپلىكنىڭ يۈزى تۇراقلىق قىممەت بولىدۇ؛

(4) A_1D_1 قىر باشتىن ـ ئاخىر سۇ يۈزى تۇرغان تەكشىلىككە پاراللېل بولىدۇ؛

(5) قاچا (3) رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك يانتۇ ھالەتكە كەلگەندە، $BE \cdot BF$ نىڭ قىممىتى تۇراقلىق بولىدۇ.

بۇلارنىڭ ئىچىدە بارلىق توغرا ھۆكۈملەرنىڭ رەت تەرتىپى ______ بولىدۇ، نېمە ئۈچۈن؟

3-2

تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىش ۋە ئۇلارنىڭ خۇسۇسىيىتى

1-3-2 تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىش

1.3.2 – رەسىم

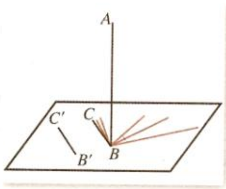
كۈندىلىك تۇرمۇشتا، بىز تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىگە دائىر نۇرغۇن ھېسسىي تونۇشلارغا ئىگە. مەسىلەن، بايراق خادىسى بىلەن يەر يۈزىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى، كۆۋرۈكنىڭ تۈۋرۈكى بىلەن سۇ يۈزىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى (1.3.2 – رەسىم) قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى بىزگە تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىك ئوبرازىنى بېرىدۇ.

2.3.2 – رەسىمدىكىدەك، كۈن نۇرىدا يەر يۈزىگە تىك بولغان بايراق خادىسىنى ۋە ئۇنىڭ يەر يۈزىدىكى سايىسىنى كۆزىتەيلى. گەرچە ۋاقىتنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ BC سايىنىڭ ئورنىدا يۆتكىلىش بولسىمۇ، ئەمما بايراق خادىسى AB ياتقان تۈز سىزىق باشتىن – ئاخىر BC ياتقان تۈز سىزىققا تىك بولىدۇ. دېمەك، بايراق خادىسى AB ياتقان تۈز سىزىق يەر يۈزىدىكى B نۇقتىدىن ئۆتكەن خالىغان بىر تۈز سىزىققا تىك بولىدۇ. ئەمەلىيەتتە، بايراق خادىسى AB ياتقان تۈز سىزىق يەر يۈزىدىكى B نۇقتىدىن ئۆتمەيدىغان خالىغان بىر تۈز سىزىق $B'C'$ غىمۇ تىك بولىدۇ.

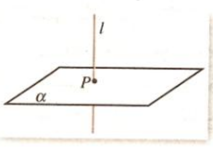
ئەگەر بىر تۈز سىزىق بىر تەكشىلىكتىكى چەكسىز كۆپ تۈز سىزىققا تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىق ئاشۇ تەكشىلىككە تىك بولامدۇ؟

ئەگەر l تۈز سىزىق α تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر تۈز سىزىققا تىك بولسا، **l تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكنى ئۆزئارا تىك** دەيمىز، ئۇنى $l \perp \alpha$ قىلىپ يازىمىز. l تۈز سىزىق α **تەكشىلىكنىڭ تىك سىزىقى**، α تەكشىلىك l **تۈز سىزىقنىڭ تىك** تەكشىلىكى دېيىلىدۇ. تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىك ئۆزئارا تىك بولغاندا، ئۇلارنىڭ بىردىنبىر ئورتاق نۇقتىسى P **تىك ئاساسى** دېيىلىدۇ.

تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىنى سىزغاندا، ئادەتتە تۈز سىزىقنى تەكشىلىكنى ئىپادىلەيدىغان پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ بىر تەرىپىگە تىك قىلىپ سىزىمىز، 3.3.2 – رەسىمدىكىدەك.



2.3.2 – رەسىم



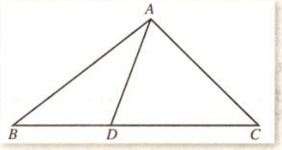
3.3.2 – رەسىم

ئېنىقلىمىدىن باشقا،بىر تۈز سىزىق بىلەن بىر تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىگە قانداق ھۆكۈم قىلىمىز؟

ئىزدىنىش

ساۋاقداشلار 4.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك بىر پارچە ئۈچبۇلۇڭ شەكىللىك قەغەز پارچىسى تەييارلاڭلار، بىز بىرلىكتە تۆۋەندىكىدەك تەجرىبە ئىشلەيلى:

$\triangle ABC$ نىڭ چوققا نۇقتىسى A ئارقىلىق قەغەز پارچىسىنى قاتلىساق، قاتلاش ئىزى AD غا ئېرىشىمىز، ئاندىن قاتلانغان قەغەز پارچىسىنى ئۈستەل يۈزىگە تىك قىلىپ قويىمىز (BD، DC لار ئۈستەل يۈزىگە تېگىشىپ تۇرىدۇ).

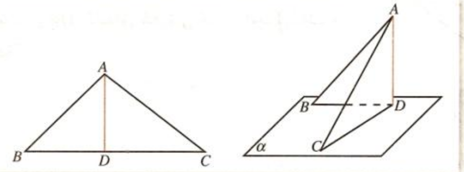


4.3.2 ـ رەسىم

(1) قاتلاش ئىزى AD ئۈستەل يۈزىگە تىك بولامدۇ؟

(2) قانداق قاتلىساق ئاندىن قاتلاش ئىزى AD نى ئۈستەل يۈزى ياتقان α تەكشىلىككە تىك قىلغىلى بولىدۇ؟

ئاسانلا بايقاشقا بولىدۇكى، قاتلاش ئىزى AD پەقەت ۋە پەقەت ئۈچبۇلۇڭنىڭ BC تەرىپىنىڭ ئېگىزلىكى بولغاندىلا، AD ياتقان تۈز سىزىق بىلەن ئۈستەل يۈزى ياتقان α تەكشىلىك ئۆزئارا تىك بولىدۇ (5.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك).



5.3.2 ـ رەسىم

مۇلاھىزە

(1) بەزىلەر، قاتلاش ئىزى AD ياتقان تۈز سىزىق بىلەن ئۈستەل يۈزى ياتقان α تەكشىلىكتىكى بىر تۈز سىزىق ئۆزئارا تىك بولسا، ئۇ ھالدا AD نىڭ α تەكشىلىككە تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلغىلى بولىدۇ، دەيدۇ. بۇ كۆزقاراشقا قوشۇلامسىز؟

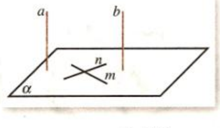
(2) 5.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، قاتلاش ئىزى $AD \perp BC$، قاتلانغاندىن كېيىن تىكلىك مۇناسىۋىتى ئۆزگەرمەيدۇ، يەنى $AD \perp BD$، $AD \perp CD$ بولىدۇ. بۇنىڭدىن قانداق يەكۈنگە ئىگە بولالايسىز؟

ئومۇمەن، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىشنىڭ تۆۋەندىكى تېئورېمىسىغا ئىگە بولىمىز.

تېئورېما: ئەگەر بىر تۈز سىزىق بىر تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىققا تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىق ئاشۇ تەكشىلىككە تىك بولىدۇ.

تېئورېمىدىكى «ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق» دېگەن بۇ شەرتكە سەل قاراشقا بولمايدۇ.

بۇ تېئورېمىدا «تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى» ۋە «تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ تىكلىكى» نى ئۆزئارا بىر ـ بىرىگە ئايلاندۇرۇشتىن ئىبارەت ماتېماتىكىلىق ئىدىيە گەۋدىلەندۈرۈلگەن.



6.3.2 ـ رەسىم

1 ـ مىسال. 6.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $a \parallel b$ ، $a \perp \alpha$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $b \perp \alpha$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

ئىسپات: α تەكشىلىكتە ئۆزئارا كېسىشكۈچى m ، n ئىككى تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزىمىز.

چۈنكى $a \perp \alpha$ ، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىك ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$a \perp m,\ a \perp n.$$

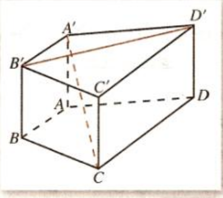
$$\because \quad b \parallel a,$$

$$\therefore \quad b \perp m, b \perp n.$$

چۈنكى $m \subset \alpha$ ، $n \subset \alpha$ ، m ، n لار ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق،

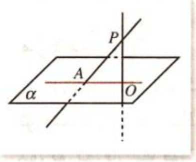
$$\therefore \quad b \perp \alpha .$$

ئىزدىنىش



7.3.2 ـ رەسىم

7.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، تىك تۆت قىرلىق پرىزما $A'B'C'D'-ABCD$ (يان قىرى ئاساسىغا تىك بولغان پرىزما تىك پرىزما دەپ ئاتىلىدۇ) دا، ئاساسىدىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ قانداق شەرتنى قانائەتلەندۈرگەندە، $A'C \perp B'D'$ بولىدۇ؟

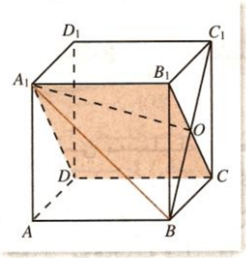


8.3.2 ـ رەسىم

8.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، PA تۈز سىزىق α تەكشىلىك بىلەن ئۆزئارا كېسىشسە، ئەمما بۇ تەكشىلىككە تىك بولمىسا، بۇ تۈز سىزىق بۇ تەكشىلىكنىڭ ئاغمىسى دېيىلىدۇ، ئاغما بىلەن تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى A ئاغمىنىڭ ئاساسى دېيىلىدۇ. ئاغما ئۈستىدىكى ئاغمىنىڭ ئاساسىدىن باشقا بىر نۇقتا ئارقىلىق تەكشىلىككە PO تىك سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، تىك ئاساسى O بىلەن ئاغمىنىڭ ئاساسى A دىن ئۆتكەن AO تۈز سىزىق بۇ ئاغمىنىڭ مۇشۇ تەكشىلىكتىكى پروپېكسىيىسى دېيىلىدۇ. تەكشىلىكنىڭ بىر ئاغمىسى بىلەن ئۇنىڭ تەكشىلىكتىكى پروپېكسىيىسىدىن هاسىل بولغان تار بۇلۇڭ **بۇ تۈز سىزىق بىلەن مۇشۇ تەكشىلىكتىن هاسىل بولغان بۇلۇڭ** دېيىلىدۇ.

بىر تۈز سىزىق تەكشىلىككە تىك بولسا، ئۇلاردىن هاسىل بولغان بۇلۇڭنى تىك بۇلۇڭ دەيمىز؛ بىر تۈز سىزىق تەكشىلىككە پاراللېل بولسا ياكى تەكشىلىكتە ياتسا، ئۇلاردىن هاسىل بولغان بۇلۇڭنى 0° لۇق بۇلۇڭ دەيمىز.

2 ـ مىسال. 9.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، A_1B تۈز سىزىق بىلەن A_1B_1CD تەكشىلىكتىن هاسىل بولغان بۇلۇڭنى تاپايلى.



9.3.2 ـ رەسىم

تەھلىل: A_1B تۈز سىزىقنىڭ A_1B_1CD تەكشىلىكتىكى پروپېكسىيىسىنى تاپساق، A_1B بىلەن A_1B_1CD تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنى تاپالايمىز.

يېشىش: B بىلەن C_1 نى تۇتاشتۇرساق B_1C بىلەن O نۇقتىدا كېسىشىدۇ، A_1 بىلەن O نى تۇتاشتۇرىمىز.

كۇبنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقىنى a دېسەك، چۈنكى $A_1B_1 \perp B_1C_1$، $A_1B_1 \perp B_1B$، شۇڭا $A_1B_1 \perp$ تەكشىلىك BCC_1B_1.

شۇڭا $A_1B_1 \perp BC_1$.

چۈنكى $BC_1 \perp B_1C$، شۇڭا $BC_1 \perp$ تەكشىلىك A_1B_1CD.

شۇڭا A_1O بولسا A_1B ئاغمىنىڭ A_1B_1CD تەكشىلىكتىكى پروپېكسىيىسى، $\angle BA_1O$ بولسا A_1B بىلەن A_1B_1CD تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ.

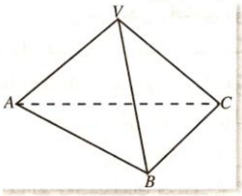
$\mathrm{Rt}\triangle A_1BO$ دا، $A_1B=\sqrt{2}\,a$، $BO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$،

شۇڭا $BO=\frac{1}{2}A_1B$، $\angle BA_1O=30°$.

شۇڭا، A_1B تۈز سىزىق بىلەن A_1B_1CD تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ $30°$ بولىدۇ.

مەشىق

1. رەسىمدىكىدەك، ئۈچ قىرلىق پىرامىدا $V-ABC$ دا، $VA=VC$، $AB=BC$ بولسا، $VB \perp AC$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. $\triangle ABC$ ياتقان α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى بىر P نۇقتا ئارقىلىق، $PO \perp \alpha$ نى ئۆتكۈزسەك، تىك ئاساسى O بولىدۇ، P بىلەن A، P بىلەن B، P بىلەن C لارنى تۇتاشتۇرىمىز.

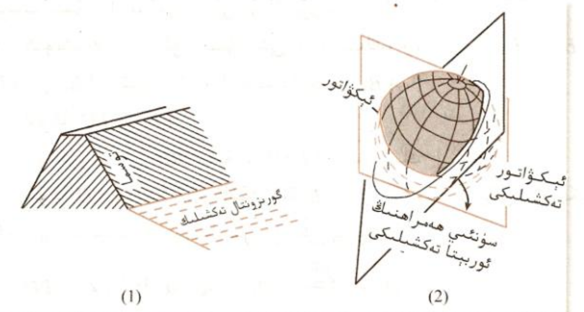
(1) ئەگەر $PA=PB=PC$، $\angle C=90°$ بولسا، ئۇ ھالدا O نۇقتا AB تەرەپنىڭ ______ نۇقتىسى بولىدۇ.

(2) ئەگەر $PA=PB=PC$ بولسا، ئۇ ھالدا O نۇقتا $\triangle ABC$ نىڭ ______ بولىدۇ.

(3) ئەگەر $PA \perp PB$، $PB \perp PC$، $PC \perp PA$ بولسا، ئۇ ھالدا O نۇقتا $\triangle ABC$ نىڭ ______ بولىدۇ.

3. ئىككى تۈز سىزىق بىلەن بىر تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭلار ئۆزئارا تەڭ بولسا، بۇ ئىككى تۈز سىزىق چوقۇم پاراللېل بولامدۇ؟

2-3-2 تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىككە ھۆكۈم قىلىش

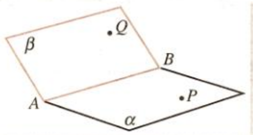


10.3.2 ـ رەسىم

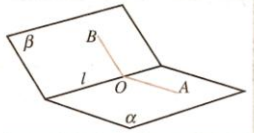
ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش ئۈچۈن، كىشىلەر ئىككى تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭلارنى مۇھاكىمە قىلىشقا ئېھتىياجلىق بولىدۇ. 10.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، توسمىلارنى ياساشتا، ئۇلارنى پۇختا ھەم چىدامىلىق قىلىش ئۈچۈن، توسما يۈزى بىلەن گورىزونتال تەكشىلىك ئارىسىدا مۇۋاپىق بۇلۇڭ ھاسىل قىلىش كېرەك؛ يەر شارى سۈنئىي ھەمراھنى قويۇپ بېرىشتىمۇ، ئېھتىياجغا ئاساسەن، سۈنئىي ھەمراھنىڭ ئوربىتا تەكشىلىكى بىلەن يەر شارىنىڭ ئېكۋاتور تەكشىلىكى ئارىسىدا بەلگىلىك بۇلۇڭ ھاسىل قىلىش كېرەك. شۇنىڭ ئۈچۈن، بىز ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ ئۇقۇمىنى كىرگۈزۈپ، ئىككى تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

11.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر تۈز سىزىقتىن چىققان ئىككى دانە يېرىم تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان شەكىل **ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ** (dihedral angle) دەپ ئاتىلىدۇ. بۇ تۈز سىزىق **ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ قىرى** دېيىلىدۇ، بۇ ئىككى دانە يېرىم تەكشىلىك **ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ ياقلىرى** دېيىلىدۇ. قىرى AB، ياقلىرى ئايرىم ـ ئايرىم α ، β بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $\alpha-AB-\beta$ قىلىپ يېزىلىدۇ. بەزىدە، ئاسان بولسۇن ئۈچۈن يەنە α ، β تەكشىلىك ئىچىدىن (قىرىدىن باشقا يېرىم تەكشىلىك قىسمى) ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا P ، Q نۇقتىلارنى ئېلىپ، بۇ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنى $P-AB-Q$ [1] قىلىپ يېزىشقىمۇ بولىدۇ. ئەگەر قىرنى l بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $\alpha-l-\beta$ ياكى $P-l-Q$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

بىر تەكشىلىكتە ياتقان بىر تۈز سىزىق بۇ تەكشىلىكنى ئىككى بۆلەككە بۆلىدۇ، بۇ ئىككى بۆلەك ئادەتتە يېرىم تەكشىلىك دەپ ئاتىلىدۇ.



11.3.2 ـ رەسىم



12.3.2 ـ رەسىم

بىز ئادەتتە «ئىشىكنى چوڭراق ئېچىۋېتىڭ» دەيمىز، بۇ قايسى بۇلۇڭنى چوڭايتىشنى كۆرسىتىدۇ؟ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى قانداق ئىپادىلەيمىز؟

12.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $\alpha-l-\beta$ نىڭ l قىرى ئۈستىدىن خالىغان بىر O نۇقتىنى ئېلىپ، O نۇقتىنى

[1] «$\angle AB$» «$^{2}\angle$» قىلىپ يېزىشقىمۇ بولىدۇ.

تىك ئاساسى قىلىپ، α ۋە β يېرىم تەكشىلىك ئىچىدە O نۇقتا ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا l قىرغا تىك قىلىپ OA، OB نۇرلارنى ئۆتكۈزسەك، OA نۇر بىلەن OB نۇردىن ھاسىل بولغان $\angle AOB$ **ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ سىزىقلىق بۇلۇڭى** دەپ ئاتىلىدۇ.

$\angle AOB$ نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى O نۇقتىنىڭ l ئۈستىدىكى ئورنى بىلەن مۇناسىۋەتلىكمۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى ئۇنىڭ سىزىقلىق بۇلۇڭى ئارقىلىق ئۆلچىنىدۇ، ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ سىزىقلىق بۇلۇڭى قانچە گرادۇس بولسا، بۇ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭمۇ شۇنچە گرادۇسلۇق ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ دېيىلىدۇ. سىزىقلىق بۇلۇڭى تىك بۇلۇڭ بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ تىك ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ دېيىلىدۇ.

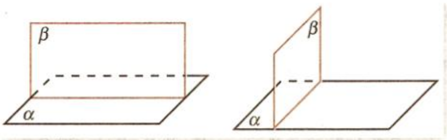
كۆزىتىش

سىنىپنىڭ ئۆزئارا قوشنا ئىككى تېمى بىلەن يەر يۈزىدىن قانچە ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ ھاسىل بولىدۇ؟ ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا بۇ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭلارنىڭ يېقى، قىرى، سىزىقلىق بۇلۇڭى ۋە ئۇنىڭ گرادۇسىنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.

سىنىپنىڭ تېمى ياتقان تەكشىلىك بىلەن يەر يۈزى ياتقان تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشىدۇ، ئۇلاردىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ تىك ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ بولىدۇ، بىز ئادەتتە تام يەر يۈزىگە تىك بولىدۇ دەيمىز.

ئومۇمەن، ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا كېسىشكەندە، ئەگەر ئۇلاردىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ تىك ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ بولسا، بۇ **ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا تىك** دېيىلىدۇ.

ئۆزئارا تىك بولغان ئىككى تەكشىلىك ئادەتتە 13.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك سىزىلىدۇ، بۇ چاغدا، تىك تەكشىلىكنىڭ تىك تەرىپى گورىزونتال تەكشىلىكنىڭ توغرا تەرىپىگە تىك قىلىپ سىزىلىدۇ. α تەكشىلىك بىلەن β تەكشىلىك ئۆزئارا تىك بولسا، ئۇ $\alpha \perp \beta$ قىلىپ يېزىلىدۇ.



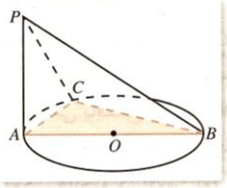
13.3.2 ـ رەسىم

ئومۇمەن، ئىككى تەكشىلىكنىڭ ئۆزئارا تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىشنىڭ تۆۋەندىكى تېئورېمىسىغا ئىگە بولىمىز:

تېئورېما: ئەگەر بىر تەكشىلىك ئىككىنچى بىر تەكشىلىكنىڭ تىك سىزىقىدىن ئۆتسە، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا تىك بولىدۇ.

بۇ تېئورېما تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىدىن پايدىلىنىپ تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىنى ئىسپاتلاشقا بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ.

3 ـ مىسال. 14.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، AB بولسا $\odot O$ نىڭ دىئامېتىرى، PA تۈز سىزىق $\odot O$ ياتقان تەكشىلىككە تىك، C بولسا چەمبەر ئايلانمىسىدىكى A، B دىن باشقا خالىغان بىر نۇقتا ئىكەنلى ـ



14.3.2 - رەسىم

كى بېرىلگەن، PBC تەكشىلىك $\perp$ PAC تەكشىلىك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

ئىسپات: $\odot O$ ياتقان تەكشىلىكنى α دېسەك، بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، $PA \perp \alpha$ بولۇپ، BC تۈز سىزىق α تەكشىلىكتە ياتىدۇ،

شۇڭا $PA \perp BC$.

چۈنكى C نۇقتا چەمبەر ئايلانمىسىدىكى A، B دىن باشقا خالىغان بىر نۇقتا، AB بولسا $\odot O$ نىڭ دىئامېترى، شۇڭا $\angle BCA$ تىك بۇلۇڭ بولىدۇ، يەنى $BC \perp AC$.

چۈنكى PA تۈز سىزىق بىلەن AC تۈز سىزىق $\triangle PAC$ ياتقان تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق،

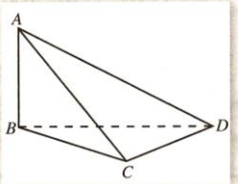
شۇڭا، PAC تەكشىلىك $\perp BC$.

چۈنكى BC تۈز سىزىق PBC تەكشىلىكتە ياتىدۇ،

شۇڭا، PBC تەكشىلىك $\perp$ PAC تەكشىلىك.

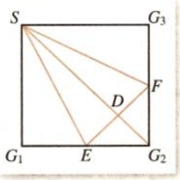
ئىزدىنىش

15.3.2 - رەسىمدىكىدەك، BCD تەكشىلىك $\perp AB$، $BC \perp CD$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، سىز قايسى تەكشىلىكلەرنىڭ ئۆزئارا تىك ئىكەنلىكىنى بايقىدىڭىز؟ نېمە ئۈچۈن؟



15.3.2 - رەسىم

مەشىق



رەسىمدىكىدەك، كۋادرات $SG_1G_2G_3$ دا، E، F لار ئايرىم - ئايرىم ھالدا G_1G_2، G_2G_3 لەرنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، D بولسا EF نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى. G_1، G_2، G_3 ئۈچ نۇقتىنى ئۈستمۇئۈست چۈشىدىغان قىلىپ، SE، SF ۋە EF لارنى بويلاپ بۇ كۋادراتنى قاتلىساق، بىر تۆت ياقلىق ھاسىل بولىدۇ. ئۈستمۇ ئۈست چۈشكەندىن كېيىنكى نۇقتىنى G نۇقتا دەپ خاتىرىلىسەك، ئۇ ھالدا تۆت ياقلىق $S-EFG$ دا چوقۇم ( ) بولىدۇ.

(A) $SG \perp$ $\triangle EFG$ ياتقان تەكشىلىك

(B) $SD \perp$ $\triangle EFG$ ياتقان تەكشىلىك

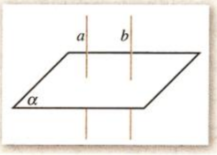
(C) $GF \perp$ $\triangle SEF$ ياتقان تەكشىلىك

(D) $GD \perp$ $\triangle SEF$ ياتقان تەكشىلىك

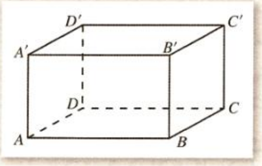
3-3-2 تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت

مۇلاھىزە ؟

(1) 16.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد $ABCD-A'B'C'D'$ دا، AA'، BB'، CC'، DD' قىرلار ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ ھەممىسى $ABCD$ تەكشىلىككە تىك بولسا، ئۇلارنىڭ ئارىسىدا قانداق ئورۇن مۇناسىۋىتى بولىدۇ؟



17.3.2 ـ رەسىم

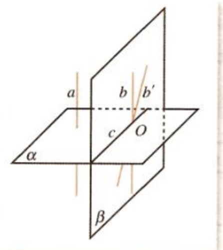


16.3.2 ـ رەسىم

(2) 17.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، a، b ئىككى تۈز سىزىق ۋە α تەكشىلىك بېرىلگەن. ئەگەر $a \perp \alpha$، $b \perp \alpha$ بولسا، ئۇ ھالدا a، b ئىككى تۈز سىزىق چوقۇم ئۆزئارا پاراللېل بولامدۇ؟

18.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، b بىلەن a پاراللېل ئەمەس ھەمدە $b \cap \alpha = O$، b' نى O نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە a تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان تۈز سىزىق دەپ پەرەز قىلىمىز. b ۋە b' تۈز سىزىق β تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ، $\alpha \cap \beta = c$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $O \in c$ بولىدۇ. چۈنكى $a \perp \alpha$، $b \perp \alpha$، شۇڭا $a \perp c$، $b \perp c$، يەنە چۈنكى $a \parallel b'$، شۇڭا $b' \perp c$. شۇنداق قىلىپ β تەكشىلىكتە، روشەنكى، c تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىكى ئوخشاش بىر O نۇقتىدىن ئۆتكەن b، b' ئىككى تۈز سىزىقنىڭ c تۈز سىزىققا تىك بولۇشى مۇمكىن ئەمەس، شۇڭا $a \parallel b$ بولىدۇ.

a، b ئىككى تۈز سىزىقنى ئوخشاش بىر تەكشىلىككە قويغىلى بولمىغانلىقتىن، تېئورېمىنى ئىسپاتلاش جەريانىدا، پاراللېل تۈز سىزىقلارغا ھۆكۈم قىلىش بىلىملىرىدىن پايدىلىنىشقا بولمايدۇ، شۇنداقلا 4 ـ ئاكسىئومىنى قوللىنىشقىمۇ بولمايدۇ. بۇ خىل ئەھۋالدا بىز «قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى»نى قوللىنىمىز.



18.3.2 ـ رەسىم

ئومۇمەن، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى ھەققىدىكى تۆۋەندىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسىغا ئىگە بولىمىز.

تېئورېما: ئوخشاش بىر تەكشىلىككە تىك بولغان ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

ئىككى تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىشنىڭ ئۇسۇللىرى ناھايىتى كۆپ، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسى بىزگە شۇنى ئېيتىپ بېرىدۇكى، ئىككى تۈز سىزىقنىڭ بىر تەكشىلىككە تىكلىكىدىن بۇ ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ئۆزئارا پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ. تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسى «پاراللېللىق» بىلەن «تىكلىك» ئارىسىدىكى ئىچكى باغلىنىشنى ئېچىپ بېرىدۇ.

ئىزدىنىش

a، b تۈز سىزىقلار ئايرىم - ئايرىم ھالدا كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ نىڭ ئىككى ئوخشىمىغان يېقى ياتقان تەكشىلىكتە بولسا، $a \parallel b$ بولۇشى ئۈچۈن، a، b لار قانداق شەرتنى ھازىرلىشى كېرەك؟

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملەرنىڭ توغرا - خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ. توغرا بولسا «✓» بەلگىسىنى، خاتا بولسا «×» بەلگىسىنى قويۇڭ.

(1) ئوخشاش بىر تۈز سىزىققا تىك بولغان ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ. ( )

(2) ئوخشاش بىر تەكشىلىككە تىك بولغان ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ. ( )

(3) بىر تۈز سىزىق بىر تەكشىلىكتە ياتسا، يەنە بىر تۈز سىزىق بۇ تەكشىلىككە تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا تىك بولىدۇ. ( )

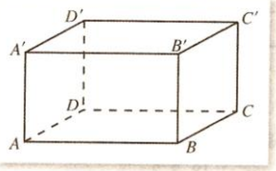
2. a، b تۈز سىزىقلار ۋە α تەكشىلىك بېرىلگەن ھەمدە $b \perp a$، $a \perp \alpha$ بولسا، ئۇ ھالدا b بىلەن α نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ______ .

4-3-2 تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت

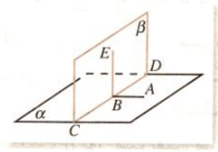
مۇلاھىزە؟

(1) دوسكا ياتقان تەكشىلىك بىلەن يەر يۈزى ياتقان تەكشىلىك ئۆزئارا تىك، سىز دوسكىغا يەر يۈزىگە تىك قىلىپ بىر تۈز سىزىق سىزالامسىز؟

(2) 19.3.2 - رەسىمدىكىدەك، $ABCD-A'B'C'D'$ پاراللېلېپىپېدتا، $A'ADD'$ تەكشىلىك بىلەن $ABCD$ تەكشىلىك ئۆزئارا تىك، $A'A$ تۈز سىزىق ئۇلارنىڭ كېسىشىش سىزىقى AD غا تىك بولسا، $A'ADD'$ تەكشىلىكتىكى $A'A$ تۈز سىزىق $ABCD$ تەكشىلىككە تىك بولامدۇ؟



19.3.2 - رەسىم



20.3.2 ـ رەسىم

20.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\alpha \perp \beta$ ، $\alpha \cap \beta = CD$ ، $AB \subset \alpha$ ، $AB \perp CD$ ھەمدە $AB \cap CD = B$ دەپ پەرەز قىلىپ، AB تۈز سىزىق بىلەن β تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى كۆرۈپ باقايلى.

β تەكشىلىكتە $BE \perp CD$ تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزسەك (تىك ئاساسى B)، $\angle ABE$ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $\alpha - CD - \beta$ نىڭ سىزىقلىق بۇلۇڭى بولىدۇ. $\alpha \perp \beta$ دىن $AB \perp BE$ كېلىپ چىقىدۇ. يەنە $AB \perp CD$ ، BE تۈز سىزىق بىلەن CD تۈز سىزىق β تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق، شۇڭا $AB \perp \beta$ بولىدۇ.

ئومۇمەن، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى ھەققىدىكى تۆۋەندىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسىغا ئىگە بولىمىز.

تېئورېما: ئەگەر ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا تىك بولسا، ئۇ ھالدا بىر تەكشىلىكتىكى ئۇلارنىڭ كېسىشىش سىزىقىغا تىك بولغان تۈز سىزىق ئىككىنچى تەكشىلىككە تىك بولىدۇ.

بىزگە مەلۇمكى، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىدىن پايدىلىنىپ تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلغىلى بولىدۇ. تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسى شۇنى چۈشەندۈرىدۇكى، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىدىن تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىگە ئىگە بولغىلى بولىدۇ. بۇ خىل تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ۋە تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ئارىسىدىكى ئۆزئارا ئايلاندۇرۇش، بوشلۇقتىكى شەكىللەرگە دائىر مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشنىڭ مۇھىم ئىدىيە ـ ئۇسۇلى بولۇپ ھېسابلىنىدۇ.

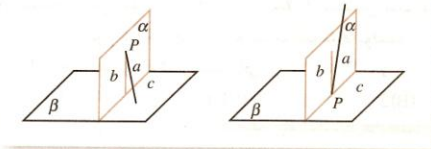
مۇلاھىزە ؟

$\alpha \perp \beta$ ، P نۇقتا α تەكشىلىكتە ياتىدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، P نۇقتا ئارقىلىق β تەكشىلىككە a تىك سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك قانداق ئورۇن مۇناسىۋىتىدە بولىدۇ؟

بىزگە مەلۇمكى، بىر نۇقتا ئارقىلىق بېرىلگەن بىر تەكشىلىككە تىك قىلىپ پەقەت بىرلا تۈز سىزىق ئۆتكۈزۈشكە بولىدۇ. شۇڭا، ئەگەر بىر نۇقتىدىن ئۆتكەن ئىككى تۈز سىزىق ئوخشاش بىر تەكشىلىككە تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ.

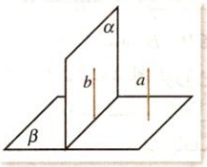
21.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\alpha \cap \beta = c$ دەپ پەرەز قىلىپ، P نۇقتا ئارقىلىق α تەكشىلىككە $b \perp c$ تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكى ھەققىدىكى خۇسۇسىيەت تېئورېمىسىغا ئاساسەن $b \perp \beta$ بولىدۇ.

بىر نۇقتا ئارقىلىق β تەكشىلىككە تىك قىلىپ پەقەت ۋە پەقەت بىرلا تۈز سىزىق ئۆتكۈزۈشكە بولىدىغانلىقتىن، a تۈز سىزىق بىلەن b تۈز سىزىق ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ، شۇڭا $a \subset \alpha$ بولىدۇ.



21.3.2 ـ رەسىم

4 ـ مىسال. 22.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، α ، β تەكشىلىكلەر بېرىلـگەن، $\alpha\perp\beta$ ، a تۈز سىزىق $a\perp\beta$ ، $a\not\subset\alpha$ لارنى قانائەتلەندۈرسە، a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلايلى.



22.3.2 ـ رەسىم

يېشىش: α تەكشىلىكتە α بىلەن β نىڭ كېسىشىش سىزىقىغا تىك قىلىپ b تۈز سىزىقنى سىزىمىز.

$$\because\ \alpha\perp\beta,\quad \therefore\ b\perp\beta.$$
$$\because\ a\perp\beta,\quad \therefore\ a\,/\!/\,b.$$
$$\because\ a\not\subset\alpha,\quad \therefore\ a\,/\!/\,\alpha.$$

يەنى a تۈز سىزىق α تەكشىلىككە پاراللېل بولىدۇ.

ئىزدىنىش

α ، β ئىككى تەكشىلىك، a تۈز سىزىق ھەمدە $\alpha\perp\beta$ ، $\alpha\cap\beta=AB$ ، $a\,/\!/\,\alpha$ ، $a\perp AB$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، a تۈز سىزىق بىلەن β تەكشىلىكـنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملەر ئىچىدە خاتا بولغىنى ( )

(A) ئەگەر α تەكشىلىك $\perp$ β تەكشىلىك بولسا، ئۇ ھالدا α تەكشىلىكتىكى بارلىق تۈز سىزىقلار β تەكشىلىككە تىك بولىدۇ

(B) ئەگەر α تەكشىلىك $\perp$ β تەكشىلىك بولسا، ئۇ ھالدا α تەكشىلىكتە چوقۇم β تەكشىلىككە پاراللېل بولغان تۈز سىزىق مەۋجۇت بولىدۇ

(C) ئەگەر α تەكشىلىك β تەكشىلىككە تىك بولمىسا، ئۇ ھالدا α تەكشىلىكتە چوقۇم β تەكشىلىككە تىك بولغان تۈز سىزىق مەۋجۇت بولمايدۇ

(D) ئەگەر α تەكشىلىك $\perp$ γ تەكشىلىك، β تەكشىلىك $\perp$ γ تەكشىلىك، $\alpha\cap\beta=l$ بولسا، ئۇ ھالدا $l\perp\gamma$ بولىدۇ

2. ئىككى تەكشىلىكنىڭ ئۆزئارا تىكلىكى ۋە تۆۋەندىكى ھۆكۈملەر بېرىلگەن:

① بىر تەكشىلىكتىكى بېرىلگەن تۈز سىزىق چوقۇم ئىككىنچى بىر تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر تۈز سىـزىققا تىك بولىدۇ.

② بىر تەكشىلىكتىكى بېرىلگەن تۈز سىزىق چوقۇم ئىككىنچى بىر تەكشىلىكتىكى چەكسىز كۆپ تۈز سىزىقلارغا تىك بولىدۇ.

③ بىر تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر تۈز سىزىق چوقۇم ئىككىنچى بىر تەكشىلىككە تىك بولىدۇ.

④ بىر تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر نۇقتا ئارقىلىق ئۇلارنىڭ كېسىشىش سىزىقىنىڭ تىك سىزىقىنى ئۆتـكۈزسەك، ئۇ ھالدا بۇ تىك سىزىق چوقۇم ئىككىنچى بىر تەكشىلىككە تىك بولىدۇ.

بۇلارنىڭ ئىچىدىكى توغرا بولغان ھۆكۈملەرنىڭ سانى ( )

(A) 3　　(B)2　　(C) 1　　(D) 0

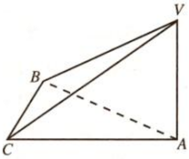
3.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملەرنىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ، توغرا بولسا سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ، خاتا بولسا مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

(1) تەكشىلىك $\alpha \perp$ تەكشىلىك β , تەكشىلىك $\beta \perp$ تەكشىلىك $\gamma \Rightarrow$ تەكشىلىك $\alpha \perp$ تەكشىلىك γ ;

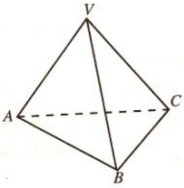
(2) تەكشىلىك α // تەكشىلىك α_1, تەكشىلىك β // تەكشىلىك β_1, تەكشىلىك $\alpha \perp$ تەكشىلىك $\beta \Rightarrow$ تەكشىلىك $\alpha_1 \perp$ تەكشىلىك β_1.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. α، β، γ تەكشىلىكلەر ھەمدە $\alpha \perp \gamma$، $\alpha // \beta$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، $\beta \perp \gamma$ نى ئىسپاتلاڭ.

3. رەسىمدىكىدەك، ئۈچ قىرلىق پىرامىدا $V-ABC$ دا، $\angle VAB = \angle VAC = \angle ABC = 90^\circ$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، VBA تەكشىلىك بىلەن VBC تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.



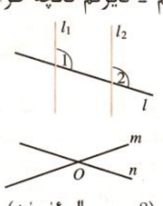
(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكىدەك، ئۈچ قىرلىق پىرامىدا $V-ABC$ دا، $VA = VB = AC = BC = 2$، $AB = 2\sqrt{3}$، $VC = 1$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $V-AB-C$ نىڭ سىزىقلىق بۇلۇڭىنى سىزىپ چىقىڭ ھەمدە ئۇنىڭ گرادۇس سانىنى تېپىڭ.

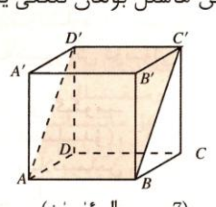
5. α، β، γ تەكشىلىكلەرنىڭ $\alpha \perp \gamma$، $\beta \perp \gamma$، $\alpha \cap \beta = l$ لارنى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقى بېرىلگەن، $l \perp \gamma$ نى ئىسپاتلاڭ.

6. ئەگەر نۇقتىداش بولغان ئۈچ تۈز سىزىق ئىككى ـ ئىككىدىن ئۆزئارا تىك بولسا، ئۇ ھالدا ئۇلار ئىچىدىكى ھەر ئىككى تۈز سىزىق بەلگىلىگەن تەكشىلىكلەرمۇ ئىككى ـ ئىككىدىن ئۆزئارا تىك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

7. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ دا، $ABC'D'$ تەكشىلىك بىلەن كۇبنىڭ ھەر قايسى ياقلىرىدىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭلار ئايرىم ـ ئايرىم قانچە گرادۇس بولىدۇ؟



(8 ـ مىسال ئۈچۈن)



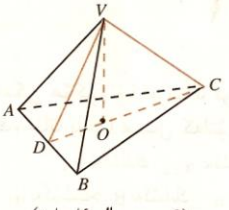
(7 ـ مىسال ئۈچۈن)

8. رەسىمدىكىدەك، m، n لار ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق، l_1، l_2 لەر m، n نىڭ ھەر ئىككىسىگە تىك بولغان تۈز سىزىقلار ھەمدە l تۈز سىزىق l_1، l_2 لەرنىڭ ھەر ئىككىسى بىلەن كېسىشىدۇ، $\angle 2 = \angle 1$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

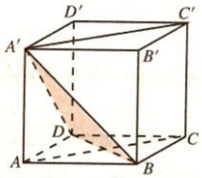
9. ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق بىلەن ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭلار ئۆزئارا تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

1. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ دا، $A'BD$ تەكشىلىك $\perp$ $ACC'A'$ تەكشىلىك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

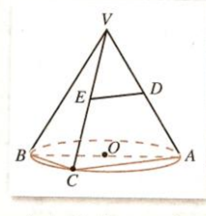


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، پىرامىدا $V-ABC$ دا، $VO \perp$ ABC تەكشىلىك، $O \in CD$، $VA=VB$، $AD=BD$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، سىز $CD \perp AB$ ھەمدە $AC=BC$ بولىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلالامسىز؟



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. ئىككى ـ ئىككىدىن ئۆزئارا تىك بولغان ئۈچ تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش سىزىقلىرىمۇ ئىككى ـ ئىككىدىن ئۆزئارا تىك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

4. رەسىمدىكىدەك، AB بولسا $\odot O$ نىڭ دىئامېتىرى، C نۇقتا $\odot O$ نىڭ ئۈستىدىكى ھەرىكەتچان نۇقتا، ھەرىكەتچان نۇقتا C دىن ئۆتكەن VC تۈز سىزىق چەمبەر $\odot O$ ياتقان تەكشىلىككە تىك، D، E لار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا VA، VC لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، DE تۈز سىزىق بىلەن VBC تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

ئېۋكلىد «قولىيازما» سى ۋە ئاكسىئومىلاشتۇرۇش ئۇسۇلى

ئېۋكلىد

قەدىمكى گرېتسىيىدىكى ئەڭ مۇھىم ماتېماتىكا ئەسىرى گېئومېتىرىيە «قولىيازما» سى بولۇپ (قىسقىچە «قولىيازما» دەپ ئاتىلىدۇ)، ئۇنى قەدىمكى گرېتسىيە ماتېماتىكى ئېۋكلىد (Euclid، مىلادىيىدىن ئىلگىرىكى 330 ~ 275 ـ يىللار) تەخمىنەن مىلادىيىدىن ئىلگىرىكى 300 ـ يىللار ئەتراپىدا يېزىپ تاماملىغان. ئېۋكلىد مىلادىيىدىن ئىلگىرىكى 7 ـ ئەسىردىن بۇيانقى گرېتسىيە ماتېماتىكلىرى جۇغلىغان مول نەتىجىلەرنى رەتلەپ، توپلاپ ھەمدە سىستېمىلاشتۇرغان. تەجرىبىلەرنىڭ تەكرار ئىسپاتلىشىدىن ئۆتكەن ئاز ساندىكى ئاكسىئومىلاردىن چىقىش قىلىپ، لوگىكىلىق خۇلاسە ۋە ماتېماتىكىلىق ھېسابلاش ئۇسۇللىرىنى قوللىنىپ بىر قاتار تېئورېما ۋە نەتىجىلەرنى كەلتۈرۈپ چىقىرىپ، ماتېماتىكا تەرەققىيات تارىخىدا

ئىنتايىن چوڭقۇر تەسىر گە ئىگە ئون ئۈچ بابلىق ماتېماتىكا ئەسىرى «قولىيازما» نى يېزىپ چىقىپ، گېئومېترىيىنى مۇستەقىل، دېدۇكسىيىلىك بىر پەنگە ئايلاندۇردى.

ئېۋكلىد «قولىيازما» سى دەۋر بۆلگۈچ خاراكتېرلىك ئەسەر بولۇپ، ئۇنىڭ ئۇلۇغ تارىخىي ئەھمىيىتى شۇكى، ئۇ ئىنسانىيەت ماتېماتىكا تارىخىدا تۇنجى بولۇپ ئاكسىئوملاشتۇرۇلغان ماتېماتىكا سىستېمىسىنى ئوتتۇرىغا قويدى. ئىلگىرى جۇغلانغان ماتېماتىكا بىلىملىرى تارقاق، تولۇق بولمىغان ھالەتتە ئىدى، ئېۋكلىد لوگىكىلىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ بۇ بىلىملەرنى توپلاپ، تۈرلەرگە ئايرىپ، سېلىشتۇرۇپ، ئۆزئارا ئىچكى باغلىنىشلىرىنى ئېچىپ بېرىپ، مۇستەھكەم بىر سىستېما ئىچىگە رەتلەپ چىقتى. «قولىيازما» دا بۇ خىل ئىدراكىي روھ نامايەندە قىلىنغان بولۇپ، ئۇ پۈتكۈل ماتېماتىكا تەرەققىياتىغا چوڭقۇر تەسىر كۆرسەتتى. دەل شۇ سەۋەبلىك، «قولىيازما» رايون، مىللەت، تىل، ۋاقىت قاتارلىق بارلىق توسالغۇلاردىن ھالقىپ ئۆتۈپ پۈتكۈل دۇنياغا تارقالدى. ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلى بىر خىل نەزەرىيە شەكلىدە كىشىلەر تەرىپىدىن ئومۇمىيۈزلۈك قوبۇل قىلىندى. كىشىلەر ھازىر بۇ خىل تونۇشنى ئومۇميۈزلۈك تۇرغۇزۇپ بولدى، بارلىق ماتېماتىكا نەزەرىيىلىرى، چوقۇم ماتېماتىكىدىكى ئېنىقلىما، ئاكسىئوما ۋە ئۈچ ھۆكۈملۈكنىڭ لوگىكىلىق دەلىللىشىدىن تەشكىل تاپىدۇ. «قولىيازما» ماتېماتىكا تەرەققىياتىدىكى بىر بايراق، شۇنداقلا ئىدراكىي تەپەككۇرنىڭ سىمۋولى.

ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلى دېگەن نېمە؟

ماتېماتىكىلىق ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلى دېگىنىمىز ئىمكانقەدەر ئاز بولغان دەسلەپكى ئۇقۇم (ئاساسىي ئۇقۇم) ۋە ئىمكانقەدەر ئاز بولغان بىر گۇرۇپپا ئىسپاتلاش تەلەپ قىلىنمايدىغان دەسلەپكى ھۆكۈملۈك (ئاكسىئوما، پەرەز) نى چىقىش قىلىپ، مۇستەھكەم لوگىكىلىق خۇلاسە چىقىرىش ئارقىلىق، باشقا ھۆكۈملۈكلەرنى كەلتۈرۈپ چىقىرىپ، مەلۇم بىر ماتېماتىكا تارمىقىنى دېدۇكسىيە سىستېمىسىغا ئايلاندۇرىدىغان بىر خىل ئۇسۇلدىن ئىبارەت.

ئاساسىي ئۇقۇم بولسا ئېنىقلىما بېرىلمەيدىغان دەسلەپكى ئۇقۇملار بولۇپ، ئۇلار چوقۇم ھەقىقىي نېگىزلىك، ئۇنىڭدىنمۇ دەسلەپكى، ئۇنىڭدىنمۇ ئاساسىي بولغان ئۇقۇملار ئارقىلىق ئېنىقلىما بېرىشكە بولمايدىغان بولۇشى كېرەك. مەسىلەن، ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكىسىدىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىك، توپلام قاتارلىق ئۇقۇملارنىڭ ھەممىسى ئاساسىي ئۇقۇملاردۇر.

ئاكسىئوما بولسا ئاساسىي ئۇقۇملار ئارىسىدىكى ئۆزئارا مۇناسىۋەت ۋە ئاساسىي خۇسۇسىيەتلەرگە قارىتا ئوتتۇرىغا قويۇلغان بايان ۋە بەلگىلىمىلەردىن ئىبارەت. مەسىلەن، «ئىككى نۇقتا ئارقىلىق پەقەت ۋە پەقەت بىرلا تۈز سىزىق ئۆتكۈزۈشكە بولىدۇ»، «ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتمايدىغان ئۈچ نۇقتا ئارقىلىق پەقەت ۋە پەقەت بىرلا تەكشىلىك بەلگىلەشكە بولىدۇ» قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى ئاكسىئوما بولغان ھۆكۈملۈكلەردۇر.

ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلىنىڭ ئاساسلىق تۆۋەندىكىدەك ئۈچ خىل رولى بار:

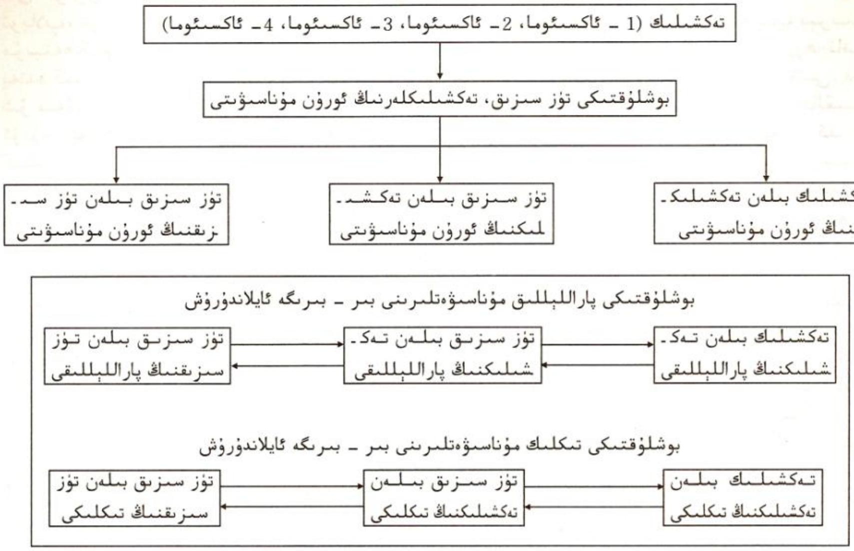
(1) ماتېماتىكا بىلىملىرىنى يىغىنچاقلاپ رەتلەش. «قولىيازما» دا ئېۋكلىد ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلىنى قوللىنىپ تارقاق گېئومېترىيە بىلىملىرىنى بىر گەۋدىگە يىغىنچاقلاپ، ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلى ئارقىلىق ماتېماتىكىنى تەتقىق قىلىشنىڭ ئۈلگىسىنى تىكلەپ بەردى.

(2) يېڭى نەزەرىيەلەرنىڭ ئىجاد قىلىنىشىنى ئىلگىرى سۈرۈش. ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلىدا ماتېماتىكا تارمىقىنىڭ ئاساسى ناھايىتى ئېنىق تەھلىل قىلىنىدۇ، قۇرۇلمىسى پۈختا تەرتىپلىك بولىدۇ، بۇ ماتېماتىكىنىڭ ھەرقايسى تارماقلىرى ئوتتۇرىسىدىكى پەرق ۋە ئوخشاشلىقلارنى سېلىشتۇرۇشقا پايدىلىق بولۇپ، شۇ ئارقىلىق ماتېماتىكا يېڭى نەزەرىيىسىنىڭ كېلىپ چىقىشىغا تۈرتكە بولىدۇ، ماتېماتىكا ئاساسىنى تەتقىق قىلىش ۋە ئىزدىنىشنى ئىلگىرى سۈرىدۇ. مەسىلەن، غەيرىي ئېۋكلىد گېئومېترىيىسى دەل ئاكسىئوملاشتۇرۇشنى تەتقىق قىلىش ۋە ئۇنى قوللىنىش جەريانىدا مەيدانغا كەلگەن.

(3) باشقا پەنلەرگە قارىتا ئۈلگە كۆرسىتىش رولى بار. ماتېماتىكىلىق ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلىنىڭ ماتېماتىكا نەزەرىيىلىرىنى بايان قىلىشتىكى توغرىلىقى، تەرتىپلىكلىكى ھەمدە قۇرۇلمىسىنىڭ ماسلىششچانلىقى تۈپەيلىدىن، باشقا پەن نەزەرىيىلىرىنى بايان قىلىشتا ئۈلگىلىك رول ئوينايدۇ. باشقا پەنلەرمۇ ئۇنىڭغا تەقلىد قىلىپ، ئۆزلىرىنىڭ ئاكسىئوملاشتۇرۇش سىستېمىسىنى قۇرۇپ چىقتى.

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. تەكشىلىكنى تەسۋىرلەيدىغان ئۈچ ئاكسىئوما ستېرېئومېترىيە ئاكسىئوما سىستېمىسىنىڭ ئۇ- لى بولۇپ، بوشلۇقتىكى شەكىللەرنى تەتقىق قىلىش، لوگىكىلىق ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىشنىڭ ئاساسى. 1 ـ ئاكسىئوما بولسا تۈز سىزىقنىڭ تەكشىلىكتە ياتىدىغان ـ ياتمايدىغانلىقىنىڭ ئاساسى؛ 2 ـ ئاكسىـ ئوما بولسا تەكشىلىكنى بەلگىلەشنىڭ ئەڭ تۈپكى ئاساسى بىلەن تەمىنلەيدۇ؛ 3 ـ ئاكسىئوما بولسا ئىككى تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش سىزىقىنىڭ ئورنىغا ھۆكۈم قىلىشنىڭ ئاساسى.

4 ـ ئاكسىئوما بولسا بوشلۇقتىكى تۈز سىزىقلارنىڭ پاراللېللىق مۇناسىۋەتلىرىگە ھۆكۈم قىلىشـ ـنىڭ بىر ئاساسى.

2. بوشلۇقتىكى شەكىللەرگە دائىر مەسىلىلەر دائىم تەكشىلىككە دائىر مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇۋېـ ـلىنىدۇ. «تەكشىلىكنى بەلگىلەش» بولسا بوشلۇقتىكى مەسىلىلەرنى تەكشىلىكتىكى مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇۋېلىشنىڭ مۇھىم شەرتى، شۇنداقلا بۇ خىل ئايلاندۇرۇش بوشلۇقتىكى شەكىللەردە بىر قىسىم مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشنىڭ مۇھىم ئىدىيە ئۇسۇلى. بۇ خىل ئايلاندۇرۇشنىڭ ئەڭ تۈپكى ئاساسى دەل تۆت ئاكسىئومىدىن ئىبارەت.

3. بۇ بابنىڭ يادروسى بوشلۇقتىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىدىن ئىـ ـبارەت. بىلىم قۇرۇلمىسىدىن قارىغاندا، تەكشىلىكنىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيىتى ئاساسىدا، ئاساندىن قىـ

يىنىغا ئۆتۈش تەرتىپى بويىچە تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىق، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىك، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋەتلىرى مۇھاكىمە قىلىنغان. تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىدىن پايدىلىنىپ، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى تەتقىق قىلىمىز، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىدىن پايدىلىنىپ تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

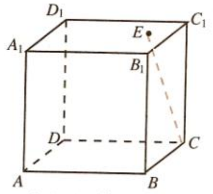
ئەكسىچە بولغاندا، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىدىن تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئىگىلىۋالىمىز، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىك، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىدىن تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ بەلگىلىيەلەيمىز. بۇ خىل ئۇسۇل بوشلۇقتىكى تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى مۇھاكىمە قىلىش ۋە ئۇنى ھەل قىلىشتىكى مۇھىم ئۇسۇلدۇر.

4. «پاراللېللىق» ۋە «تىكلىك» بولسا تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىق، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىك، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ئىچىدىكى ئەڭ مۇھىم ئىككى خىل ئورۇن مۇناسىۋىتىدۇر. بوشلۇقتا پاراللېللىق مۇناسىۋەتلىرى ئارىسىدىكى بىر - بىرىگە ئايلاندۇرۇش، تىكلىك مۇناسىۋەتلىرى ئارىسىدىكى بىر - بىرىگە ئايلاندۇرۇش ھەمدە تىكلىك بىلەن پاراللېللىق مۇناسىۋەتلىرى ئارىسىدىكى بىر - بىرىگە ئايلاندۇرۇشنى قانداق ئەمەلگە ئاشۇرغىلى بولىدىغانلىقىنى مۇلاھىزە قىلىڭ.

5. كۆزىتىش ۋە ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىش بىزنىڭ دۇنيانى تونۇشىمىزدىكى مۇھىم ئىككى يول، بۇ ئىككىسى بىر - بىرىنى تولۇقلاپ تۇرىدۇ، بىرى كەم بولسا بولمايدۇ. كۆزىتىش (ئەمەلىيەت) تىن بەزى پاكىتلارنى (مەسىلەن، ئاكسىئوما) يىغىنچاقلاپ چىققىلى بولىدۇ، بۇ ئاساستا، بۇ پاكىتلاردىن چىقىش قىلىپ، لوگىكىلىق ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىش ئۇسۇلىنى قوللىنىپ، يېڭى پاكىتلارنى ئىسپاتلاپ كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز.

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. ئۈچ تەكشىلىك بوشلۇقنى قانچە بۆلەككە بۆلىدۇ؟ سىز ئۇلارنىڭ كۆرسەتمىلىك شەكلىنى سىزىپ چىقالامسىز؟

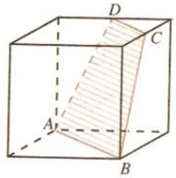
2. رەسىمدىكىدەك، كۇب شەكىللىك بىر پارچە ياغاچ ماتېرىيالنىڭ ئۈستۈنكى ئاساسىدا بىر E نۇقتا بار بولۇپ، E نۇقتا ئارقىلىق CE تۈز سىزىقتا تىك قىلىپ ئۈستۈنكى ئاساسىغا بىر تۈز سىزىق سىزىشقا توغرا كەلسە، ئۇنى قانداق سىزىش كېرەك.

3. ئىككى ـ ئىككىدىن ئۆزئارا كېسىشىدىغان ھەمدە ئوخشاش بىر نۇقتىدىن ئۆتمەيدىغان ئۈچ تۈز سىزىق چوقۇم ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

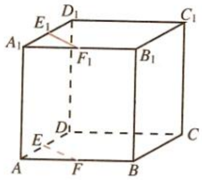
4. رەسىمدىكىدەك، كۇبنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقى a بولۇپ، C، D لار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا ئۇنىڭ ئىككى قىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى.

(1) $ABCD$ تۆت تەرەپلىكنىڭ (رەسىمدىكى سىزىلغان قىسىم) تراپېتسىيە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ؛

(2) تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ يۈزىنى تېپىڭ.



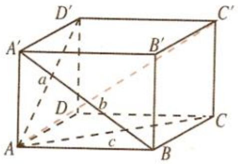
(4 ـ مىسال ئۈچۈن)



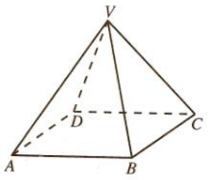
(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

5. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، $AE=A_1E_1$، $AF=A_1F_1$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $EF \parallel E_1F_1$ ھەمدە $EF=E_1F_1$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

6. رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېدنىڭ ئۈچ يېقىنىڭ دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا a، b، c بولسا، پاراللېلېپىپېدنىڭ دىئاگونالى AC' نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.



(6 ـ مىسال ئۈچۈن)

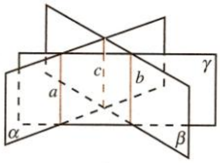


(7 ـ مىسال ئۈچۈن)

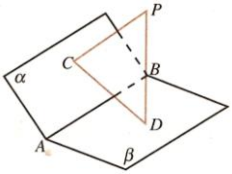
7. رەسىمدىكىدەك، تۆت قىرلىق پىرامىدا $V-ABCD$ نىڭ $ABCD$ ئاساسى تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 2 بولغان كۋادرات بولۇپ، قالغان تۆت يان يېقى يان قىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $\sqrt{5}$ بولغان تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭلار، ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $V-AB-C$ نىڭ سىزىقلىق بۇلۇڭىنى سىزىپ چىقىڭ ھەمدە ئۇنىڭ گرادۇس سانىنى تېپىڭ.

8. α، β، γ لارنىڭ ئۈچ تەكشىلىك ھەمدە $\alpha \cap \beta = a$، $\alpha \cap \gamma = b$، $\beta \cap \gamma = c$، $a \cap b = O$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a، b، c ئۈچ تۈز سىزىقنىڭ نۇقتىداش ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاڭ.

9. رەسىمدىكىدەك، α، β، γ تەكشىلىكلەر ئىككى - ئىككىدىن ئۆزئارا كېسىشىدۇ، a، b، c لار كېسىشىش سىزىقلىرى ھەمدە $a \parallel b$ بولسا، ئۇ ھالدا a بىلەن c، b بىلەن c قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟



(9 - مەسىلە ئۈچۈن)



(10 - مەسىلە ئۈچۈن)

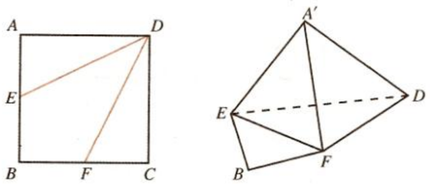
10. رەسىمدىكىدەك، α، β لار تەكشىلىك ھەمدە $\alpha \cap \beta = AB$، $PC \perp \alpha$، $PD \perp \beta$، C، D لار تىك ئاساسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، AB تۈز سىزىق بىلەن CD تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە يەكۈنىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

1. رەسىمدىكىدەك، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 2 بولغان كۋادرات $ABCD$ دا،

(1) E نۇقتا AB نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، F نۇقتا BC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، $\triangle AED$، $\triangle DCF$ لارنى ئايرىم - ئايرىم ھالدا DE، DF لارنى بويلاپ قاتلىساق، A، C ئىككى نۇقتا A' نۇقتىدا ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ. $A'D \perp EF$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

(2) $BE = BF = \frac{1}{4} BC$ بولغاندا، ئۈچ قىرلىق پىرامىدا $A' - EFD$ نىڭ ھەجمىنى تېپىڭ.

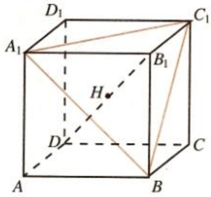


(1 - مەسىلە ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $B_1D \perp$ تەكشىلىك A_1C_1B؛

(2) B_1D بىلەن A_1C_1B تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى H بولسا $\triangle A_1C_1B$ نىڭ ئېغىرلىق مەركىزى بولىدۇ (ئۈچ بۇلۇڭنىڭ ئۈچ مېدىئانىسىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى).



(2 - مەسىلە ئۈچۈن)

3 ـ باب

تۈز سىزىق ۋە تەڭلىمە

گېئومېترىيە تەتقىقاتىدا، بىز دائىم گېئومېترىيىلىك شەكىللەردىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ مۇناسىۋىتىگە بىۋاستە ئاساسلىنىپ گېئومېترىيىلىك شەكىللەرنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىمىز. ئەمدى بىز يەنە بىر خىل تەتقىقات ئۇسۇلى — كوئوردېنات ئۇسۇلىنى قوللىنىمىز. كوئوردېنات ئۇسۇلى كوئوردېنات سىستېمىسىنى ۋاستە قىلىپ، گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇۋېلىپ، ئالگېبرالىق ھېسابلاش ئارقىلىق گېئومېترىيىلىك شەكىللەرنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىدىغان ئۇسۇلدۇر. بۇ ئانالىتىك گېئومېترىيىدىكى ئەڭ ئاساسلىق تەتقىقات ئۇسۇلىدۇر.

بۇ بابتا ئالدى بىلەن تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، تۈز سىزىق تەڭلىمىسى تۇرغۇزۇلىدۇ. ئاندىن تۈز سىزىققا دائىر خۇسۇسىيەتلەر، مەسىلەن، پاراللېللىق، تىكلىك، ئىككى تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى، نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق قاتارلىقلار تەڭلىمە ئارقىلىق تەتقىق قىلىنىدۇ.

ئانالىتىك گېئومېترىيىنى 17 ـ ئەسىردىكى فرانسىيە ماتېماتىكى دېكارت ۋە فېرما كەشىپ قىلغان. ئانالىتىك گېئومېترىيىنىڭ كەشىپ قىلىنىشى ماتېماتىكا تەرەققىيات تارىخىدىكى بىر نامايەندە بولۇپ، ماتېماتىكا شۇنىڭدىن باشلاپ تۇراقلىق مىقدار ماتېماتىكىسىدىن ئۆزگىرىشچان مىقدار ماتېماتىكا دەۋرىگە قەدەم قويىدى. مۇشۇنىڭدىن باشلاپ ئانالىتىك گېئومېترىيە يېقىنقى زامان ماتېماتىكىسىنىڭ ئاساسلىرىدىن بىرىگە ئايلاندى.

3

تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىس-
تېمىسى گېئومېتىرىيە تەتقىقاتىنى يەنە
بىر قېتىم يۈكسەلدۈردى. گېئومېتىرىيە
شۇنىڭدىن باشلاپ يېڭى بىر دەۋرگە قەدەم
قويدى. ئەمدى بىز تۈز سىزىققا تەڭلىمە-
دىن ئىبارەت بۇ «قانات» نى ئورنىتايلى!

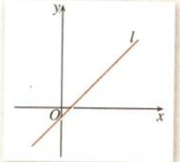
1-3 تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى ۋە يانتۇلۇقى

تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، نۇقتا كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، ئۇنداق بولسا، تۈز سىزىقنى قانداق ئىپادىلەش كېرەك؟ تۈز سىزىققا دائىر مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش ئۈچۈن، بۇ پاراگرافتا ئالدى بىلەن تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى بەلگىلەيدىغان گېئومېترىيىلىك زۆرۈر ئامىللار ئۈستىدە ئىزدىنىمىز، ئاندىن بۇ گېئومېترىيىلىك زۆرۈر ئامىللارنى كوئوردىنات سىستېمىسىدا ئالگېبرالىق ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەپ چىقىمىز.

1-1-3 يانتۇلۇق بۇلۇڭى ۋە يانتۇلۇق

مۇلاھىزە؟

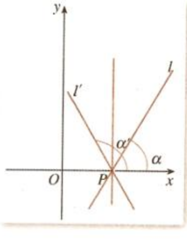
تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى بىر l تۈز سىزىققا نىسبەتەن (1.1.3 - رەسىم)، ئۇنىڭ ئورنى قايسى شەرتلەر تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ؟



1.1.3 - رەسىم

بىزگە مەلۇمكى، ئىككى نۇقتا بىر تۈز سىزىقنى بەلگىلەيدۇ. بىر نۇقتا بىر تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى بەلگىلىيەلەمدۇ؟ l تۈز سىزىقنىڭ P نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، l تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى بەلگىلىگىلى بولامدۇ؟

P نۇقتا ئارقىلىق چەكسىز كۆپ تۈز سىزىق l_1، l_2، l_3، ... لارنى ئۆتكۈزۈشكە بولىدۇ، ئۇلارنىڭ ھەممىسى P نۇقتىدىن ئۆتىدۇ (بىر تۈز سىزىقلار دەستىسىنى ھاسىل قىلىدۇ)، بۇ تۈز سىزىقلارنىڭ پەرقى نەدە؟



2.1.3 - رەسىم

ئاسانلا كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئۇلارنىڭ يانتۇلۇق دەرىجىسى ئوخشىمايدۇ. تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق دەرىجىسىنى قانداق تەسۋىرلەش كېرەك؟

l تۈز سىزىق بىلەن x ئوق ئۆزئارا كېسىشكەندە، x ئوقنى ئۆلچەم قىلساق، x ئوقنىڭ مۇسبەت يۆنىلىشى بىلەن l تۈز سىزىقنىڭ يۇقىرى يۆنىلىشى ئارىسىدا ھاسىل بولغان α بۇلۇڭنى l تۈز سى-

ـزىقنىڭ **يانتۇلۇق بۇلۇڭى** (angle of inclination) دەيمىز. 2.1.3 ـ رەسىمدە l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى α بولسا تار بۇلۇڭ، l' تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى α' بولسا كەڭ بۇلۇڭ. l تۈز سىزىق بىلەن x ئوق پاراللېل ياكى ئۈستمۇئۈست چۈشكەندە، بىز ئۇنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭىنى $0°$ دەپ بەلگىلەيمىز. شۇڭا، تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى α نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى:

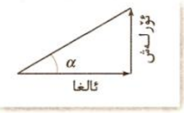
$$0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ.$$

شۇڭا، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا ھەربىر تۈز سىزىقنىڭ بەلگىلەنگەن بىر يانتۇلۇق بۇلۇڭى α بار بولىدۇ ھەمدە يانتۇلۇق دەرىجىسى ئوخشاش بولغان تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭلىرىمۇ ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ؛ يانتۇلۇق دەرىجىسى ئوخشاش بولمىغان تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭلىرى تەڭ بولمايدۇ. شۇڭا، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى بىر تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق دەرىجىسىنى يانتۇلۇق بۇلۇڭى α ئارقىلىق ئىپادىلەيمىز.

يۇقىرىدا ئېيتىلغاندەك، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، تۈز سىزىق ئۈستىدىكى بىر نۇقتا ئارقىلىق بۇ تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى بەلگىلەشكە بولمايدۇ. ئوخشاشلا، تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى α بېرىلسىمۇ، بۇ تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى بەلگىلەشكە بولمايدۇ. ئەمما، تۈز سىزىق ئۈستىدىكى بىر نۇقتا ۋە بۇ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى بېرىلسە، بىر تۈز سىزىقنى بىردىنبىر بەلگىلەشكە بولىدۇ. شۇڭا، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا بىر تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى بەلگىلەيدىغان گېئومېترىيىلىك زۆرۈر ئامىل — تۈز سىزىق ئۈستىدىكى بىر نۇقتا ھەم ئۇنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭىدىن ئىبارەت، ئىككىسىدىن بىرى كەم بولسا بولمايدۇ.

مۇلاھىزە ?

كۈندىلىك تۇرمۇشتا، يانتۇلۇق دەرىجىسىنى ئىپادىلەيدىغان يەنە باشقا مىقدارلار بارمۇ؟



3.1.3 ـ رەسىم

3.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، كۈندىلىك تۇرمۇشىمىزدا، بىز دائىم «يۇقىرى ئۆرلەش مىقدارى بىلەن ئالغا ئىلگىرىلەش مىقدارىنىڭ نىسبىتى» ئارقىلىق يانتۇ يۈزنىڭ «يانتۇلۇقى» (يانتۇلۇق دەرىجىسى) نى ئىپادىلەيمىز، يەنى

$$\text{يانتۇلۇق (نىسبىتى)} = \frac{\text{يۇقىرى ئۆرلەش مىقدارى}}{\text{ئالغا ئىلگىرىلەش مىقدارى}}.$$

مەسىلەن، «ئالغا 2 ئۆرلەش 3» بىلەن «ئالغا 2 ئۆرلەش 2» نى سېلىشتۇرساق، ئالدىدىكىسى تېخىمۇ تىكرەك بولىدۇ. چۈنكى يانتۇلۇق (نىسبىتى) $\frac{3}{2} > \frac{2}{2}$.

ئەگەر بىز «يانتۇلۇق بۇلۇڭى» دېگەن بۇ ئۇقۇمنى قوللانساق، ئۇ ھالدا بۇ يەردىكى «يانتۇلۇق (نىسبىتى)» ئەمەلىيەتتە «يانتۇلۇق بۇلۇڭى α نىڭ تانگېنسى» بولىدۇ، بىر تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى α نىڭ تانگېنس قىممىتىنى بۇ تۈز سىزىقنىڭ **يانتۇلۇقى** (slope) دەپ ئاتايمىز. يانتۇلۇق ئادەتتە كىچىك ھەرپ k ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ. يەنى

$$\boxed{k = \tan\alpha.}$$

مەسىلەن، يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\alpha = 45^\circ$ بولغاندا، بۇ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى

$$k = \tan 45^\circ = 1;$$

يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\alpha = 135°$ بولغاندا، ❶ $\tan(180° - 45°) = -\tan 45°$ دىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$k = \tan 135° = -\tan 45° = -1,$$

يەنى، بۇ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى -1 بولىدۇ.

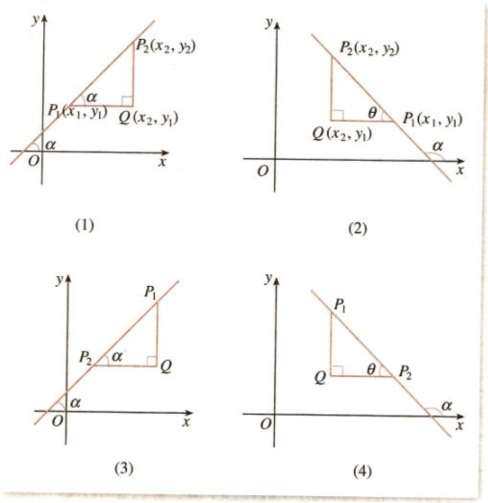
يانتۇلۇق بۇلۇڭى $90°$ قا تەڭ بولغان تۈز سىزىق يانتۇلۇققا ئىگە ئەمەس.

يانتۇلۇق بۇلۇڭى $90°$ قا تەڭ بولمىغان تۈز سىزىقلارنىڭ ھەممىسى يانتۇلۇققا ئىگە، يانتۇلۇق بۇلۇڭى ئوخشاش بولمىسا، تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇقىمۇ ئوخشاش بولمايدۇ. شۇڭا، يانتۇلۇق ئارقىلىقمۇ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق دەرىجىسىنى ئىپادىلەيمىز.

تۆۋەندە تۈز سىزىق ئۈستىدىكى ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردېناتلىرى ئارقىلىق تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنى قانداق ھېسابلاش ئۈستىدە ئىزدىنىمىز.

$P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ ئىككى نۇقتا، $x_1 \neq x_2$ بېرىلگەن، P_1P_2 تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى k نى تاپايلى.

4.1.3 ـ رەسىم (1)، (2) دىكىدەك، P_1P_2 تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭىنى α ($\alpha \neq 90°$) دەپ پەرەز قىلىمىز، P_1P_2 تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىشى (يەنى P_1 دىن P_2 گە بولغان يۆنىلىش) يۇقىرىغا قاراپ يۆنەلگەندە، P_1 نۇقتا ئارقىلىق x ئوقىنىڭ پاراللېل سىزىقىنى، P_2 نۇقتا ئارقىلىق y ئوقىنىڭ پاراللېل سىزىقىنى ئۆتكۈزسەك، ئىككى تۈز سىزىق Q نۇقتىدا كېسىشىدۇ. شۇڭا، Q نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى (x_2, y_1) بولىدۇ.



4.1.3 ـ رەسىم

4.1.3 ـ رەسىم (1) دىكىدەك، α تار بۇلۇڭ بولغاندا، $\alpha = \angle QP_1P_2$، $x_1 < x_2$، $y_1 < y_2$. $\mathrm{Rt}\triangle P_1P_2Q$ دا،

❶ α تار بۇلۇڭ بولغاندا، $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$.

$$\tan\alpha=\tan\angle QP_1P_2=\frac{|QP_2|}{|P_1Q|}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

4.1.3 ـ رەسىم (2) دىكىدەك، α كەڭ بۇلۇڭ بولغاندا، $\alpha=180^\circ-\theta$ ($\angle QP_1P_2=\theta$ دېسەك)، $x_1>x_2$، $y_1<y_2$.

$$\tan\alpha=\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta.$$

$Rt\triangle P_1P_2Q$ دا،

$$\tan\theta=\frac{|QP_2|}{|QP_1|}=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

بۇنىڭدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

يەنى

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

ئوخشاش قائىدە بويىچە، 4.1.3 ـ رەسىم (3)، (4) لەردىكىدەك، P_2P_1 نىڭ يۆنىلىشى يۇقىرىغا قاراپ يۆنەلگەندە، تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

يەنى

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

مۇلاھىزە

P_1P_2 تۈز سىزىق x ئوققا پاراللېل ياكى x ئوق بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشكەندە، يۇقىرىدىكى ئىپادە يەنىلا كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

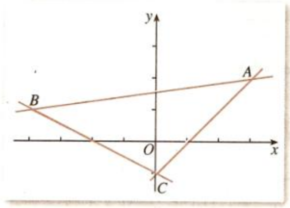
يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرساق، $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ ($x_1\neq x_2$) ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق فورمۇلىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}$$

مۇلاھىزە

(1) تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدە $A(a_1, a_2)$، $B(b_1, b_2)$ ئىككى نۇقتا بېرىلگەن، يۇقىرىدىكى فورمۇلنى قوللىنىپ AB تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنى تاپقاندا، A، B ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتلىرىنىڭ تەرتىپى بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولامدۇ؟

(2) تۈز سىزىق y ئوققا پاراللېل ياكى y ئوق بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشكەندە، يۇقىرىدىكى فورمۇلا يەنىلا مۇۋاپىق بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟



5.1.3 ـ رەسىم

1 ـ مىسال. 5.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، $A(3, 2)$، $B(-4, 1)$، $C(0, -1)$ لار بېرىلگەن، تۈز سىزىق AB، BC، CA لارنىڭ يانتۇلۇقىنى تاپايلى ھەمدە بۇ تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭىنىڭ تار بۇلۇڭ ياكى كەڭ بۇلۇڭ ئىكەنلىكىگە ھۆكۈم قىلايلى.

يېشىش: AB تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{AB}=\dfrac{1-2}{-4-3}=\dfrac{1}{7}$؛

BC تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{BC}=\dfrac{-1-1}{0-(-4)}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$؛

CA تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{CA}=\dfrac{-1-2}{0-3}=\dfrac{-3}{-3}=1$.

$k_{AB}>0$ ۋە $k_{CA}>0$ دىن AB، CA تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى ئوخشاشلا تار بۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى، $k_{BC}<0$ دىن BC تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى كەڭ بۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى بىلىمىز.

2 ـ مىسال. تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، كوئوردېنات بېشىدىن ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا 1، 1 ـ ، 2 ۋە 3 ـ بولغان l_1، l_2، l_3 ۋە l_4 تۈز سىزىقلارنى سىزايلى.

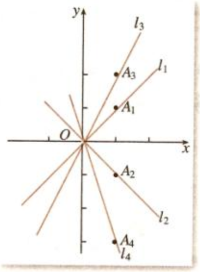
تەھلىل: كوئوردېنات بېشىدىن ئۆتكەن l_1 تۈز سىزىقنى سىزىش ئۈچۈن، پەقەت l_1 تۈز سىزىق ئۈستىدىن يەنە مەلۇم بىر A_1 نۇقتىنى تېپىشلا كۇپايە، A_1 نىڭ كوئوردېناتىنى OA_1 نىڭ يانتۇلۇقى ئارقىلىق بەلگىلەشكە بولىدۇ.

يېشىش: $A_1(x_1, y_1)$ نۇقتىنى l_1 تۈز سىزىق ئۈستىدىكى بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق، يانتۇلۇق فورمۇلىسىغا ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$$1=\frac{y_1-0}{x_1-0},$$

يەنى $x_1=y_1$.

$x_1=1$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $y_1=1$ بولىدۇ، شۇڭا A_1 نىڭ كوئوردېناتى $(1, 1)$ بولىدۇ. كوئوردېنات بېشى ۋە $A_1(1, 1)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق دەل بىز سىزماقچى بولغان l_1 تۈز سىزىق بولىدۇ. 6.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك.



6.1.3 ـ رەسىم

ئوخشاش قائىدە بويىچە، $-1=\dfrac{y_2-0}{x_2-0}$ دىن $y_2=-x_2$ كېلىپ چىقىدۇ. $x_2=1$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $y_2=-1$ بولىدۇ. شۇڭا، l_2 تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىكى بىر A_2 نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(1, -1)$ بولىدۇ. كوئوردېنات بېشى ۋە $A_2(1, -1)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق دەل بىز سىزماقچى بولغان l_2 تۈز سىزىق بولىدۇ.

ئوخشاش قائىدە بويىچە، l_3 بولسا كوئوردېنات بېشى ۋە $A_3(1, 2)$ دىن ئۆتكەن تۈز سىزىق، l_4 بولسا كوئوردېنات بېشى ۋە $A_4(1, -3)$ دىن ئۆتكەن تۈز سىزىق بولىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى بېرىلگەن، ئۇلارنىڭ يانتۇلۇقىنى تېپىڭ:

(1) $\alpha = 30^\circ$; (2) $\alpha = 45^\circ$; (3) $\alpha = 120^\circ$; (4) $\alpha = 135^\circ$.

2. تۆۋەندىكى ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنى تېپىڭ ھەمدە ئۇنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭىنىڭ تار بۇلۇڭ ياكى كەڭ بۇلۇڭ بولىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $C(18, 8)$, $D(4, -4)$; (2) $P(0, 0)$, $Q(-1, \sqrt{3})$.

3. a، b، c لار ئىككى - ئىككىدىن ئۆزئارا تەڭ بولمىغان ھەقىقىي سانلار ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭىنى تېپىڭ:

(1) $A(a, c)$, $B(b, c)$; (2) $C(a, b)$, $D(a, c)$;

(3) $P(b, b+c)$, $Q(a, c+a)$.

4. $(0, 2)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇقلىرى ئايرىم - ئايرىم ھالدا 2 ۋە -2 بولغان تۈز سىزىقلارنى سىزىپ چىقىڭ.

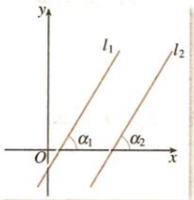
2-1-3 ئىككى تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقى ۋە تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىش

تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق دەرىجىسىنى ئىپادىلەش ئۈچۈن، تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى ئۇقۇمىنى كىرگۈزدۇق، تۈز سىزىقنىڭ x ئوققا نىسبەتەن يانتۇلۇق دەرىجىسىنى ئىپادىلەش ئۈچۈن، يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنى كىرگۈزدۇق ھەمدە يانتۇلۇقنى ھېسابلاش فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقاردۇق، يەنى گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇۋالدۇق. ئۇنداق بولسا، بىز تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى ئارقىلىق ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلالامدۇق؟

l_1، l_2[1] ئىككى تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنى ئايرىم - ئايرىم k_1، k_2 دەپ پەرەز قىلىمىز.

مۇلاھىزە؟

$l_1 \parallel l_2$ بولغاندا، k_1 بىلەن k_2 قانداق مۇناسىۋەتنى قانائەتلەندۈرىدۇ؟



7.1.3 - رەسىم

ئەگەر $l_1 \parallel l_2$ بولسا، ئۇ ھالدا l_1 بىلەن l_2 نىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭلىرى α_1 بىلەن α_2 ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ، 7.1.3 - رەسىمدىكىدەك. $\alpha_1 = \alpha_2$ دىن $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$ كېلىپ چىقىدۇ، يەنى $k_1 = k_2$ بولىدۇ. شۇڭا،

ئەگەر $l_1 \parallel l_2$ بولسا، ئۇ ھالدا $k_1 = k_2$ بولىدۇ.

ئەكسىچە بولغاندا، ئەگەر $k_1 = k_2$ بولسا، ئۇ ھالدا $l_1 \parallel l_2$ بولىدۇ.

شۇنىڭ بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشمەيدىغان l_1، l_2 ئىككى تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى ئايرىم - ئايرىم ھالدا k_1، k_2 بولسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكىگە

[1] ئالاھىدە ئەسكەرتىش بېرىلمىگەندە، «l_1، l_2 ئىككى تۈز سىزىق» ئادەتتە ئۈستمۇئۈست چۈشمەيدىغان ئىككى تۈز سىزىقنى كۆرسىتىدۇ.

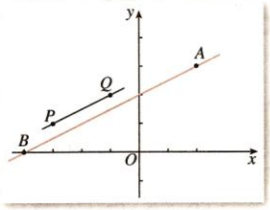
ئېرىشىمىز:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

l_1، l_2 تۈز سىزىقلار بەزىدە ئۈستمۇئۈست چۈشۈپ قېلىشىمۇ مۇمكىن، شۇنىڭ بىلەن بىز يەنە تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$k_1=k_2 \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \parallel l_2, \\ \text{ياكى } l_1 \text{ بىلەن } l_2 \text{ ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ} \end{cases}$$

مەسىلەن، يانتۇلۇقتىن پايدىلىنىپ ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلىغاندا، بۇ يەكۈننى قوللىنىشقا توغرا كېلىدۇ.



8.1.3 ـ رەسىم

3 ـ مىسال. $A(2, 3)$، $B(-4, 0)$، $P(-3, 1)$، $Q(-1, 2)$ لار بېرىلگەن، تۈز سىزىق BA بىلەن PQ نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلايلى ھەمدە يەكۈنىمىزنى ئىسپاتلايلى.

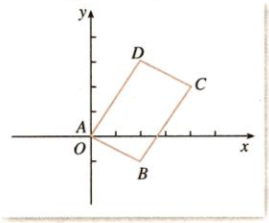
يېشىش: 8.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك،

BA تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{BA}=\frac{3-0}{2-(-4)}=\frac{1}{2}$،

PQ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{PQ}=\frac{2-1}{-1-(-3)}=\frac{1}{2}$.

چۈنكى $k_{BA}=k_{PQ}$، شۇڭا تۈز سىزىق $BA \parallel PQ$ بولىدۇ.

4 ـ مىسال. تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ تۆت چوققىسى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $A(0, 0)$، $B(2, -1)$، $C(4, 2)$، $D(2, 3)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ شەكلىگە ھۆكۈم قىلايلى ھەمدە ئىسپاتلايلى.



9.1.3 ـ رەسىم

يېشىش: 9.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك،

AB تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{AB}=-\frac{1}{2}$،

CD تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{CD}=-\frac{1}{2}$،

BC تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{BC}=\frac{3}{2}$،

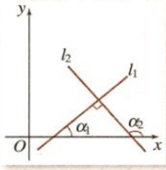
DA تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{DA}=\frac{3}{2}$.

چۈنكى $k_{AB}=k_{CD}$، $k_{BC}=k_{DA}$، شۇڭا $AB \parallel CD$، $BC \parallel DA$.

شۇنىڭ ئۈچۈن تۆت تەرەپلىك $ABCD$ پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

$l_1 \perp l_2$ بولغاندا، k_1 بىلەن k_2 قانداق مۇناسىۋەتنى قانائەتلەندۈرىدۇ؟



10.1.3 ـ رەسىم

l_1، l_2 ئىككى تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى ئايرىم ـ ئايرىم α_1 ۋە α_2 دەپ پەرەز قىلايلى ($\alpha_1,\ \alpha_2 \neq 90^\circ$).

10.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، ئەگەر $l_1 \perp l_2$ بولسا، بۇ چاغدا $\alpha_1 \neq \alpha_2$ بولىدۇ (نېمە ئۈچۈن؟)، ئۈچبۇلۇڭنىڭ خالىغان بىر تاشقى بۇلۇڭى ئۇنىڭغا قوشنا بولمىغان ئىككى ئىچكى بۇلۇڭنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ، يەنى

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1.$$

چۈنكى l_1، l_2 لەرنىڭ يانتۇلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم k_1، k_2 ھالدا ھەمدە $\alpha_2 \neq 90^\circ$ (نېمە ئۈچۈن؟)، شۇنىڭ ئۈچۈن

$$\tan\alpha_2 = \tan(90^\circ + \alpha_1) = -\frac{1}{\tan\alpha_1}$$ ❶

غا ئاساسەن

$$k_1k_2 = -1$$

نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ.

ئىزدىنىش

$k_1k_2 = -1$ بولغاندا، l_1 بىلەن l_2 قانداق ئورۇن مۇناسىۋەتتە بولىدۇ؟

يۇقىرىقىلاردىن بىلىۋالالايمىزكى، ئەگەر ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ھەر ئىككىسى يانتۇلۇققا ئىگە ھەمدە ئۇلار ئۆزئارا تىك بولسا، ئۇ ھالدا ئۇلارنىڭ يانتۇلۇقلىرىنىڭ كۆپەيتمىسى -1 گە تەڭ بولىدۇ؛ ئەكسىچە بولغاندا، ئۇلارنىڭ يانتۇلۇقلىرىنىڭ كۆپەيتمىسى -1 گە تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا ئۇلار بىر ـ بىرىگە تىك بولىدۇ، يەنى

$$\boxed{l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1.}$$

5 ـ مىسال. $A(-6, 0)$، $B(3, 6)$، $P(0, 3)$، $Q(6, -6)$ لار بېرىلگەن، تۈز سىزىق AB بىلەن PQ نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلايلى.

يېشىش: AB تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{AB} = \frac{2}{3}$.

PQ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{PQ} = -\frac{3}{2}$،

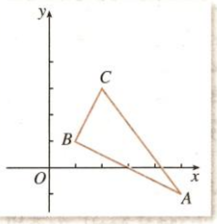
چۈنكى $k_{AB}k_{PQ} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$،

شۇڭا تۈز سىزىق $AB \perp PQ$.

6 ـ مىسال. $A(5, -1)$، $B(1, 1)$، $C(2, 3)$ ئۈچ نۇقتا بېرىلگەن، $\triangle ABC$ نىڭ شەكلىگە ھۆكۈم قىلايلى.

---

❶ $\tan(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha}$.



11.1.3 ـ رەسىم

تەھلىل: 11.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، $AB \perp BC$ دەپ پەرەز قىلساق، $\triangle ABC$ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ.

يېشىش: AB تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{AB} = -\frac{1}{2}$،

BC تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k_{BC} = 2$.

$k_{AB} k_{BC} = -1$ دىن $AB \perp BC$ كېلىپ چىقىدۇ، يەنى $\angle ABC = 90°$.

شۇنىڭ ئۈچۈن $\triangle ABC$ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھەربىر جۈپ تۈز سىزىقنىڭ پاراللېل ياكى تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $A(2, 3)$، $B(-1, 0)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن l_1 تۈز سىزىق بىلەن $P(1, 0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇقى 1 بولغان l_2 تۈز سىزىق؛

(2) $C(3, 1)$، $D(-2, 0)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن l_3 تۈز سىزىق بىلەن $M(1, -4)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇقى -5 بولغان l_4 تۈز سىزىق.

2. m نىڭ قىممىتىنى بەلگىلەڭ، نەتىجىدە $A(m, 1)$، $B(-1, m)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق بىلەن $P(1, 2)$، $Q(-5, 0)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق

(1) پاراللېل بولسۇن؛ (2) تىك بولسۇن.

1.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنىڭ مۇتلەق قىممىتى 1 گە تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭىنى تېپىڭ.

2. تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ تۆت چوققىسى $A(2, 3)$، $B(1, -1)$، $C(-1, -2)$، $D(-2, 2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ تۆت تەرىپى ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇقىنى تېپىڭ.

3. تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k = 2$، $A(3, 5)$، $B(x, 7)$، $C(-1, y)$ لار بۇ تۈز سىزىق ئۈستىدىكى ئۈچ نۇقتا ئىكەنلىكى بېرىلگەن، x بىلەن y نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

4. (1) m قانداق قىممەتنى ئالغاندا، $A(-m, 6)$، $B(1, 3m)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى 12 بولىدۇ؟

(2) m قانداق قىممەتنى ئالغاندا، $A(m, 2)$، $B(-m, -2m-1)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $60°$ بولىدۇ؟

5. $A(1, 2)$، $B(-1, 0)$، $C(3, 4)$ ئۈچ نۇقتا بېرىلگەن، بۇ ئۈچ نۇقتا ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

6. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەرقايسى تارماق مەسىلىدىكى ئوخشىمىغان ئىككى تۈز سىزىق l_1 بىلەن l_2 نىڭ پاراللېل ياكى پاراللېل ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) l_1 نىڭ يانتۇلۇقى 2، l_2 تۈز سىزىق $A(1, 2)$، $B(4, 8)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ؛

(2) l_1 تۈز سىزىق $P(3, 3)$، $Q(-5, 3)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ، l_2 تۈز سىزىق x ئوققا پاراللېل، ئەمما P، Q ئىككى نۇقتىدىن ئۆتمەيدۇ.

(3) l_1 تۈز سىزىق $M(-1, 0)$، $N(-5, -2)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ، l_2 تۈز سىزىق $R(-4, 3)$، $S(0, 5)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ.

7. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەرقايسى تارماق مەسىلىدىكى ھەربىر جۈپ تۈز سىزىقنىڭ تىك ياكى تىك ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) l_1 نىڭ يانتۇلۇقى $-\frac{2}{3}$، l_2 تۈز سىزىق $A(1, 1)$، $B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ؛

(2) l_1 نىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $45°$، l_2 تۈز سىزىق $P(-2, -1)$، $Q(3, -6)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ؛

(3) l_1 تۈز سىزىق $M(1, 0)$، $N(4, -5)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ، l_2 تۈز سىزىق $R(-6, 0)$، $S(-1, 3)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ.

8. $A(1, -1)$، $B(2, 2)$، $C(3, 0)$ ئۈچ نۇقتا بېرىلگەن، تۈز سىزىق $AB \perp CD$ ھەمدە $CB \parallel AD$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان D نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. $M(2, 2)$، $N(5, -2)$ نۇقتىلار بېرىلگەن، P نۇقتا x ئوقنىڭ ئۈستىدە ھەمدە $\angle MPN$ تىك بۇلۇڭ بولسا، P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

2. l_1 تۈز سىزىق $A(m, 1)$، $B(-3, 4)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ، l_2 تۈز سىزىق $C(1, m)$، $D(-1, m+1)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ، تۈز سىزىق l_1 بىلەن l_2: (1) پاراللېل، (2) تىك بولغاندىكى، m نىڭ قىممىتىنى ئايرىم ـ ئايرىم تېپىڭ.

3. تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ چوققىلىرى $A(2, 2+2\sqrt{2})$، $B(-2, 2)$، $C(0, 2-2\sqrt{2})$، $D(4, 2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ تىك تۆتبۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

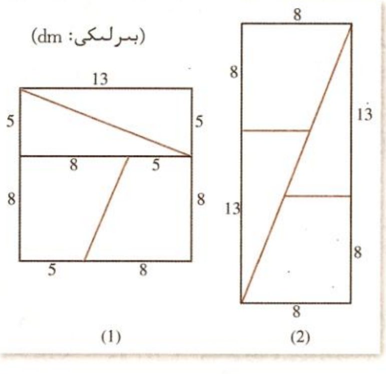
4. تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ چوققىلىرى $A(m, n)$، $B(6, 1)$، $C(3, 3)$، $D(2, 5)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، m ۋە n قانداق قىممەتنى ئالغاندا، تۆت تەرەپلىك $ABCD$ تىك بۇلۇڭلۇق تراپېتسىيە بولىدۇ؟

5. $A(m^2+2, m^2-3)$، $B(3-m-m^2, 2m)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $45°$ بولسا، m نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

6. $P(0, -1)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن بىر l تۈز سىزىقنى سىزىڭ، ئەگەر l تۈز سىزىق بىلەن $A(1, -2)$، $B(2, 1)$ ئىككى نۇقتىنى تۇتاشتۇرغۇچى كېسىك ھامان ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولسا، l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى α بىلەن يانتۇلۇقى k نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

سېھىرگەرنىڭ گىلىمى

بىر كۈنى، داڭلىق سېھىرگەر چيۇ ئەپەندى ئۇزۇنلۇقى ۋە كەڭلىكى ئوخشاشلا 1.3 مېتىر كېلىدىغان بىر پارچە گىلەمنى كۆتۈرۈپ گىلەمچى جىڭ ئۇستامنى ئىزدەپ بېرىپ (1 ـ رەسىم)، ئۇنىڭدىن بۇ كۋادرات شەكىللىك گىلەمنى كەڭلىكى 0.8 مېتىر، ئۇزۇنلۇقى 2.1 مېتىر كېلىدىغان تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك گىلەمگە ئۆزگەرتىپ بېرىشنى تەلەپ قىلدى. جىڭ ئۇستام چيۇ ئەپەندىگە: «سىز داڭلىق سېھىرگەر تۇرۇپمۇ، ھەتتا باشلانغۇچ مەكتەپ ئارىفمېتىكىسىنىمۇ ئۆگەنمىگەنمۇ؟ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1.3 مېتىر بولغان كۋادراتنىڭ يۈزى 1.69 كۋادرات مېتىر بولىدۇ، كەڭلىكى 0.8 مېتىر، ئۇزۇنلۇقى 2.1 مېتىر بولغان تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ يۈزى پەقەت 1.68 كۋادرات مېتىرلا بولىدۇ. بۇ ئىككىسى تەڭ ئەمەس! 0.01 كۋادرات مېتىرنى كېسىپ ئېلىۋەتمىسە، ئۆزگەرتكىلى بولمايدۇ» دېدى. چيۇ ئەپەندى ئۆزى ئالدىن سىزىۋالغان ئىككى پارچە لايىھەنى چىقىرىپ، جىڭ ئۇستامغا: «سىز ئالدى بىلەن بۇ رەسىمدىكى (2 ـ رەسىم (1)) ئۆلچەم بويىچە گىلەمنى تۆت پارچىغا بۆلۈڭ، ئاندىن يەنە بىر رەسىمدىكى (2 ـ رەسىم (2)) شەكىل بويىچە بۇ تۆت پارچە گىلەمنى جۈپلەپ تىكسىڭىزلا بولىدۇ. سېھىرگەرلەر ئەزەلدىن خاتالىشىپ باقمىغان، سىز خاتىرجەم ئۆزگەرتىۋېرىڭ!» دېدى. جىڭ ئۇستام ئۇنىڭ دېگىنىدەك قىلدى، ئۇ تىكىپ بولۇپ ئۆلچىۋىدى، ھەقىقەتەنمۇ كەڭلىكى 0.8 مېتىر، ئۇزۇنلۇقى 2.1 مېتىر چىقتى، سېھىرگەر ئۆزگەرتىلگەن گىلەمنى ئېلىپ مەغرۇرلانغان قىياپەتتە كېتىپ قالدى. جىڭ ئۇستام بولسا تېخىچە تېڭىرقاپ تۇرۇپ قالدى، بۇ زادى قانداق ئىش؟ 0.01 كۋادرات مېتىر گىلەم نەگە كەتتى؟ سىز ھېلىلا ئۆگەنگەن بىلىملىرىڭىزدىن پايدىلىنىپ جىڭ ئۇستامغا ياردەملىشىپ بۇ سىرنى يېشىپ بېرەلەمسىز؟



2 ـ رەسىم

1 ـ رەسىم

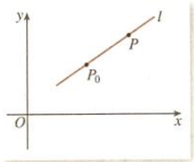
بۇ خىل مەسىلىلەرنى يېشىشتە، فىزىكىشۇناسلار ۋە ئىنژېنېرلار دائىم مودېل ياساش ئۇسۇلىنى قوللىنىدۇ، ئەلۋەتتە بۇنىڭدا ناھايىتى ئىنچىكىلىك تەلەپ قىلىنىدۇ، ماتېماتىكلار بولسا دائىم ھېسابلاش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىدۇ.

2-3 تۈز سىزىق تەڭلىمىسى

ئالدىنقى پاراگرافتا تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا بىر تۈز سىزىقنى بەلگىلەشنىڭ گېئومېترىيىلىك زۆرۈر ئامىللىرىنى تەھلىل قىلىپ ئۆتتۇق. تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىكى بېرىلگەن بىر نۇقتا ۋە تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى (يانتۇلۇقى) ئارقىلىق بىر تۈز سىزىقنى بەلگىلەشكە بولىدۇ، بېرىلگەن ئىككى نۇقتا ئارقىلىقمۇ بىر تۈز سىزىقنى بەلگىلەشكە بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن بىللە يانتۇلۇق ئۇقۇمىنى كىرگۈزۈپ، ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنى ھېسابلاش فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقاردۇق. شۇنداق قىلىپ، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، بىر نۇقتا $P_0(x_0, y_0)$ ۋە يانتۇلۇق k بېرىلسە ياكى ئىككى نۇقتا $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ بېرىلسە، بىر تۈز سىزىقنى بىردىنبىر بەلگىلەشكە بولىدۇ. دېمەك، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىلارنىڭ بۇ تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتامدىغانلىقىمۇ پۈتۈنلەي بەلگىلەنگەن بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، بىز بېرىلگەن شەرت (P_0 نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى ۋە يانتۇلۇقى k ياكى P_1، P_2 نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى) ئارقىلىق، تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتقان بارلىق نۇقتىلارنىڭ كوئوردېناتى (x, y) قانائەتلەندۈرىدىغان مۇناسىۋەتنى ئىپادىلەپ چىقالامدۇق؟

بۇ دەل بۇ پاراگرافتا مۇھاكىمە قىلىنىدىغان تۈز سىزىق تەڭلىمىسىدۇر.

1-2-3 تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى



1.2.3 - رەسىم

1.2.3 - رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىق $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە يانتۇلۇقى k، $P(x, y)$ نۇقتىنى l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى P_0 نۇقتىدىن باشقا خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق، l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى k بولغانلىقتىن، يانتۇلۇق فورمۇلىسىدىن تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

يەنى

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0).} \qquad (1)$$

يۇقىرىقى كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانىدىن بىلەلەيمىزكى:

1° $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، يانتۇلۇقى k بولغان l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى ھەربىر نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى تەڭلىمە (1) نى قانائەتلەندۈرىدۇ؛

ئەكسىچە بولغاندا، بىز يەنە تۆۋەندىكىنى ئىسپاتلىيالايمىز.

$2°$ كوئوردىناتى تەڭلىمە (1)نى قانائەتلەندۈرىدىغان ھەربىر نۇقتا ھامان $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، يانتۇلۇقى k بولغان l تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ.

ئەمەلىيەتتە، ئەگەر $P_1(x_1, y_1)$ نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى x_1، y_1 لەر تەڭلىمە (1)نى قانائەتلەندۈرسە، يەنى

$$y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0),$$

ئەگەر $x_1 = x_0$ بولسا، ئۇ ھالدا $y_1 = y_0$ بولىدۇ، بۇ، P_1 نۇقتا بىلەن P_0 نۇقتىنىڭ ئۈستمۇئۈست چۈشىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ، شۇڭا P_1 نۇقتا l تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ؛ ئەگەر $x_1 \neq x_0$ بولسا، ئۇ ھالدا $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ بولىدۇ، بۇ، P_1 ۋە P_0 نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى k بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ، شۇڭا P_1 نۇقتا $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، يانتۇلۇقى k بولغان l تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ.

يۇقىرىدا بايان قىلىنغان $1°$، $2°$ كۆچكە ئىگە، بۇ دەل تەڭلىمە (1) نىڭ $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، يانتۇلۇقى k بولغان l تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى قانائەتلەندۈرىدىغان مۇناسىۋەت ئىپادىسى ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرىدۇ، تەڭلىمە (1) نى $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، يانتۇلۇقى k بولغان l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى دەپ ئاتايمىز.

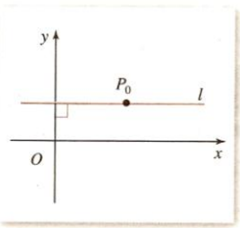
مۇلاھىزە ؟

x ئوق ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى قانداق بولىدۇ؟ y ئوق ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى قانداق بولىدۇ؟

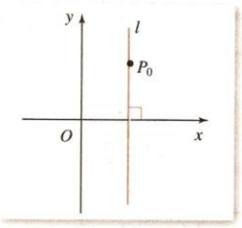
تەڭلىمە (1) تۈز سىزىق ئۈستىدىكى بىر مۇقىم نۇقتا ۋە ئۇنىڭ يانتۇلۇقى تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ، (1) نى تۈز سىزىقنىڭ **نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى**، قىسقىچە **نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشى** (point slope form) دەپ ئاتايمىز.

l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $0°$ بولغاندا (2.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك)، $\tan 0° = 0$، يەنى $k = 0$ بولىدۇ، بۇ چاغدا l تۈز سىزىق بىلەن x ئوق پاراللېل ياكى ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ، l نىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ

$$y - y_0 = 0 \text{ ياكى } y = y_0 .$$



2.2.3 ـ رەسىم

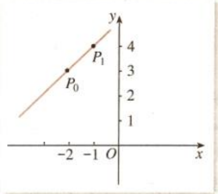


3.2.3 ـ رەسىم

l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $90°$ بولغاندا (3.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك)، تۈز سىزىق يانتۇلۇققا ئىگە بولمايدۇ، بۇ چاغدا l تۈز سىزىق بىلەن y ئوق پاراللېل ياكى ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ، ئۇنىڭ تەڭ-

لىمىسىنى نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشى ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولمايدۇ. چۈنكى بۇ چاغدا l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى ھەربىر نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى ئوخشاشلا x_0 گە تەڭ بولىدىغانلىقتىن، ئۇنىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$x-x_0=0 \text{ ياكى } x=x_0.$$



4.2.3 ـ رەسىم

1 ـ مىسال. l تۈز سىزىق $P_0(-2, 3)$ نۇقتىدىن ئۆتسە ھەمدە ئۇنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\alpha=45°$ بولسا، l تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىنى تاپايلى ھەمدە l تۈز سىزىقنى سىزىپ چىقايلى.

يېشىش: l تۈز سىزىق $P_0(-2, 3)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ، ئۇنىڭ يانتۇلۇقى $k=\tan 45°=1$، بۇنى نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىگە قويساق تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$y-3=x+2.$$

رەسىمنى سىزغاندا، پەقەت l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى يەنە بىر نۇقتا $P_1(x_1, y_1)$ نى تاپساقلا بولىدۇ، مەسىلەن، $x_1=-1$ دەپ ئالساق، $y_1=4$ بولىدۇ، P_1 نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(-1, 4)$ بولىدۇ. P_0، P_1 نۇقتىلاردىن ئۆتكەن تۈز سىزىق دەل بىز تاپماقچى بولغان تۈز سىزىق بولىدۇ، 4.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك.

ئەگەر l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى k ھەمدە y ئوق بىلەن كېسىشىش نۇقتىسى $(0, b)$ بولسا، تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىگە قويساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$y-b=k(x-0),$$

يەنى

$$\boxed{y=kx+b.} \qquad (2)$$

بىز l تۈز سىزىق بىلەن y ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى $(0, b)$ نىڭ ئوردىناتى b نى l تۈز سىزىقنىڭ y ئوقتىكى **كەسمە ئارىلىقى** (intercept) قىسقىچە **كەسمىسى** دەپ ئاتايمىز. تەڭلىمە (2) تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى k بىلەن ئۇنىڭ y ئوقتىكى كەسمىسى b ئارقىلىق بەلگىلىنىدۇ، شۇڭا تەڭلىمە (2) نى تۈز سىزىقنىڭ **يانتۇلۇق ۋە كەسمە بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى** دەپ ئاتايمىز. قىسقىچە **يانتۇلۇق ۋە كەسمە بويىچە كۆرۈنۈشى** (slope intercept form) دەپ ئاتىلىدۇ.

كەسمە ئارىلىق ئارىلىقمۇ؟

مۇلاھىزە؟

تەڭلىمە $y=kx+b$ نى كۆزىتىڭ، ئۇنىڭ شەكلى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟

بىز شۇنى بايقايمىزكى، سول تەرەپتىكى y نىڭ كوئېففىتسېنتى 1، ئوڭ تەرەپتىكى x نىڭ كوئېففىتسېنتى k ۋە ئازاد ئەزا b روشەن گېئومېترىيىلىك مەنىگە ئىگە: k بولسا تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى، b بولسا تۈز سىزىقنىڭ y ئوقتىكى كەسمىسى.

مۇلاھىزە ؟

تەڭلىمە $y=kx+b$ بىز ئۆگىنىپ ئۆتكەن بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئىپادىسىگە ئوخشىشىپ كېتىدۇ. بىزگە مەلۇمكى، بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى بىر تۈز سىزىق بولىدۇ. سىز بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=kx+b$ نى تۈز سىزىق تەڭلىمىسى نۇقتىسىدىن قانداق چۈشىنىسىز؟ بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىدىكى k بىلەن b نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى نېمە؟ سىز بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=2x-1$، $y=3x$ ۋە $y=-x+3$ نىڭ گرافىكلىرىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

2 ـ مىسال. تۈز سىزىق l_1: $y=k_1x+b_1$، l_2: $y=k_2x+b_2$ لەر بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى مۇزاكىرە قىلايلى: (1) $l_1 // l_2$ نىڭ شەرتى نېمە؟ (2) $l_1 \perp l_2$ بولۇشىنىڭ شەرتى نېمە؟

تەھلىل: 2.1.3 ـ پاراگىرافتىكى يانتۇلۇق ئارقىلىق ئىككى تۈز سىزىقنىڭ پاراللېللىقىغا، تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىش يەكۈنىنى ئەسلەپ ئۆتەيلى. (1) $l_1 // l_2$ بولغاندا، k_1 بىلەن k_2، b_1 بىلەن b_2 لەرنىڭ قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدىغانلىقىنى مۇلاھىزە قىلىمىز. (2) $l_1 \perp l_2$ بولغاندا، k_1 بىلەن k_2، b_1 بىلەن b_2 لەرنىڭ قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدىغانلىقىنى مۇلاھىزە قىلىمىز.

يېشىش: (1) ئەگەر $l_1 // l_2$ بولسا، ئۇ ھالدا $k_1=k_2$ بولىدۇ، بۇ چاغدا l_1، l_2 بىلەن y ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى ئوخشىمايدۇ، يەنى $b_1 \neq b_2$ بولىدۇ؛ ئەكسىچە $k_1=k_2$ ھەمدە $b_1 \neq b_2$ بولغاندا، $l_1 // l_2$ بولىدۇ.

(2) ئەگەر $l_1 \perp l_2$ بولسا، ئۇ ھالدا $k_1k_2=-1$ بولىدۇ؛ ئەكسىچە $k_1k_2=-1$ بولغاندا، $l_1 \perp l_2$ بولىدۇ.

شۇنىڭ بىلەن تۈز سىزىق l_1، l_2 لەرگە نىسبەتەن تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$$l_1:\ y=k_1x+b_1,\quad l_2:\ y=k_2x+b_2\ ,$$
$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2 \text{ ھەمدە } b_1 \neq b_2\ ;$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1\ .$$

مەشىق

1. تۆۋەندىكى تۈز سىزىقلارنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىنى يېزىپ چىقىڭ:

(1) $A(3, -1)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ، يانتۇلۇقى $\sqrt{2}$؛

(2) $B(-\sqrt{2}, 2)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ، يانتۇلۇق بۇلۇڭى $30°$؛

(3) $C(0, 3)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ، يانتۇلۇق بۇلۇڭى $0°$؛

(4) $D(-4, -2)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ، يانتۇلۇق بۇلۇڭى $120°$.

2. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ.

(1) تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى $y-2=x-1$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى ______، يانتۇلۇق بۇلۇڭى ______ بولىدۇ؛

(2) تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى $y+2=\sqrt{3}(x+1)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى ______، يانتۇلۇق بۇلۇڭى ______ بولىدۇ.

3. تۆۋەندىكى تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇق ۋە كەسمە بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىنى يېزىپ چىقىڭ:

(1) يانتۇلۇقى $\frac{\sqrt{3}}{2}$، y ئوقىتىكى كەسمىسى -2؛

(2) يانتۇلۇقى -2، y ئوقىتىكى كەسمىسى 4.

4. تۆۋەندىكى ھەربىر جۈپ تۈز سىزىقنىڭ پاراللېل ياكى تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) l_1: $y=\frac{1}{2}x+3$, l_2: $y=\frac{1}{2}x-2$;　　(2) l_1: $y=\frac{5}{3}x$, l_2: $y=-\frac{5}{3}x$.

2-2-3 تۈز سىزىقنىڭ ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى

مۇلاھىزە؟

$P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ ئىككى نۇقتا بېرىلگەن (بۇنىڭ ئىچىدە $x_1 \neq x_2$، $y_1 \neq y_2$) بولسا، بۇ ئىككى نۇقتا ئارقىلىق تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنى قانداق تېپىپ چىققىلى بولىدۇ؟

بىر نۇقتىنى ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇقى بېرىلگەن تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىنى تېپىپ چىقالايمىز. ئەمدى بىز مۇلاھىزە قىلماقچى بولغان مەسىلىنى ئىلگىرى ھەل قىلىنغان مەسىلىگە ئايلاندۇرۇۋېلىشقا بولىدىغان ـ بولمايدىغانلىقى ئۈستىدە ئويلىنىمىز.

$x_1 \neq x_2$ بولغاندا، تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بولىدۇ. P_1 ۋە P_2 نۇقتا ئىچىدىن خالىغان بىر نۇقتىنى ئالايلى، مەسىلەن، $P_1\ (x_1, y_1)$ نى ئالساق، نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىدىن تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$y_2 \neq y_1$ بولغاندا، بۇنى تۆۋەندىكىدەك يېزىشقا بولىدۇ:

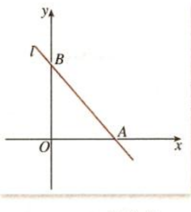
$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.} \qquad (3)$$

ئەگەر $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ دە $x_1 = x_2$ ياكى $y_1 = y_2$ بولسا، بۇ چاغدا بۇ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق تەڭلىمىسى قانداق بولىدۇ؟

مانا بۇ $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ (بۇنىڭدا $x_1 \neq x_2$، $y_1 \neq y_2$) ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق تەڭلىمىسى، ئۇنى تۈز سىزىقنىڭ **ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى**، قىسقىچە **ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشى** (two – point form) دەپ ئاتايمىز.

ئەگەر $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ ئىككى نۇقتا ئىچىدە $x_1 = x_2$ ياكى $y_1 = y_2$ بولغاندا، P_1P_2 تۈز سىزىقنىڭ ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى بولمايدۇ. $x_1 = x_2$ بولغاندا، P_1P_2 تۈز سىزىق y ئوققا پاراللېل بولىدۇ، تۈز سىزىق تەڭلىمىسى $x - x_1 = 0$ ياكى $x = x_1$ بولىدۇ؛ $y_1 = y_2$ بولغاندا، P_1P_2 تۈز سىزىق x ئوققا پاراللېل بولىدۇ، تۈز سىزىق تەڭلىمىسى $y - y_1 = 0$ ياكى $y = y_1$ بولىدۇ.

3 ـ مىسال. 5.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىق بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى $A(a, 0)$، y ئوق بىلەن كېسىشىش نۇقتىسى $B(0, b)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇنىڭدا $a \neq 0$، $b \neq 0$ بولسا، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.



5.2.3 ـ رەسىم

يېشىش: $A(a, 0)$، $B(0, b)$ ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتلىرىنى ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشكە قويساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

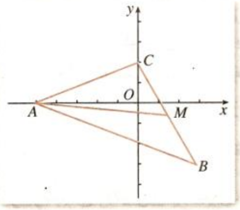
$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a},$$

يەنى

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{4}$$

بىز تۈز سىزىق بىلەن x ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى $(a, 0)$ نىڭ ئابسىسساسى a نى تۈز سىزىقنىڭ x ئوقتىكى **كەسمىسى** دەپ ئاتايمىز، بۇ چاغدا تۈز سىزىقنىڭ y ئوقتىكى كەسمىسى b بولىدۇ. تەڭلىمە (4) l تۈز سىزىقنىڭ ئىككى كوئوردىنات ئوقى ئۈستىدىكى كەسمىسى a ۋە b ئارقىلىق بەلگىلەنگەن. شۇڭا، بۇ تۈز سىزىقنىڭ كەسمىلەر بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى دەپ ئاتىلىدۇ.

4 ـ مىسال. ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ چوققىسى $A(-5, 0)$، $B(3, -3)$، $C(0, 2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، BC تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى ھەمدە بۇ تەرەپتىكى مېدىئانا ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.



6.2.3 ـ رەسىم

يېشىش: 6.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، $B(3, -3)$، $C(0, 2)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى:

$$\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x-0}{3-0},$$

بۇنى رەتلىسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$5x+3y-6=0.$$

مانا بۇ، BC تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىدۇر.

BC تەرەپتىكى مېدىئانا بولسا چوققىسى A بىلەن BC تەرەپنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M نى تۇتاشتۇرغۇچى كېسىكتىن ئىبارەت، ئوتتۇرا نۇقتىنىڭ كوئوردىنات فورمۇلىسىدىن M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىغا ئىگە بولىمىز:

ئەگەر P_1، P_2 نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم (x_1, y_1)، (x_2, y_2) ھەمدە P_1P_2 كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M نىڭ كوئوردىناتى (x, y) بولسا، بۇ ھالدا:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

بۇ فورمۇلا P_1P_2 كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىنىڭ كوئوردىنات فورمۇلىسىدۇر.

$$\left(\frac{3+0}{2},\ \frac{-3+2}{2}\right),$$

يەنى $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

$A(-5, 0)$، $M\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ نۇقتىلاردىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى

$$\frac{y-0}{-\frac{1}{2}-0}=\frac{x+5}{\frac{3}{2}+5},$$

بۇنى رەتلىسەك تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}y+\frac{5}{2}=0,$$

يەنى

$$x+13y+5=0.$$

مانا بۇ، BC تەرەپتىكى مېدىئانا ياتقان تۈز سىزىق تەڭلىمىسىدۇر.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) $P_1(2, 1)$, $P_2(0, -3)$; (2) $A(0, 5)$, $B(5, 0)$.

2. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ:

(1) x ئوقتىكى كەسمىسى 2، y ئوقتىكى كەسمىسى 3؛

(2) x ئوقتىكى كەسمىسى 5 − ، y ئوقتىكى كەسمىسى 6.

3. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) (0, 5) نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە ئىككى كوئوردىنات ئوقى ئۈستىدىكى كەسمىلىرىنىڭ يىغىندىسى 2؛

(2) (5, 0) نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە ئىككى كوئوردىنات ئوقى ئۈستىدىكى كەسمىلىرىنىڭ ئايرىمىسى 2.

3-2-3 تۈز سىزىقنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى

تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى، يانتۇلۇق ۋە كەسمە بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى، ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى x، y كە دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەردىن ئىبارەت. ئەمدى بىز تۈز سىزىق بىلەن ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ مۇناسىۋىتىنى تەكشۈرۈپ، تۆۋەندىكى ئىككى مەسىلىنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

مۇلاھىزە ؟

(1) تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى ھەربىر تۈز سىزىقنى x، y كە دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولامدۇ؟

(2) x، y كە دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرنىڭ ھەربىرى بىر تۈز سىزىقنى ئىپادىلەمدۇ؟

> تۈرگە ئايرىپ مۇزاكىرە قىلغاندا، دائىم $\alpha \neq 90^\circ$ ۋە $\alpha = 90^\circ$ بويىچە تۈرگە ئايرىپ مۇزاكىرە قىلىمىز، بۇنداق بولغاندا تەكرارلىنىپ قېلىشتىن ۋە چۈشۈرۈپ قويۇشتىن ساقلانغىلى بولىدۇ.

ئالدى بىلەن (1) مەسىلىگە قاراپ باقايلى. خالىغان بىر l تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىن خالىغان بىر $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىنى ئالساق، l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى k بولغاندا (بۇ چاغدا تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\alpha \neq 90^\circ$ بولىدۇ)، ئۇنىڭ تەڭلىمىسى

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad ①$$

بولىدۇ، بۇ x، y كە دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىدۇر

l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى مەۋجۇت بولمىغاندا، يەنى l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\alpha = 90^\circ$ بولغاندا، تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى

$$x - x_0 = 0, \qquad ②$$

بولىدۇ، تەڭلىمە ② نىمۇ x، y كە دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە دەپ قاراشقا

بولىدۇ، بۇ چاغدا تەڭلىمىدىكى y نىڭ كوئېففىتسېنتى 0 بولىدۇ.

تەڭلىمە ① ۋە ② لەرنىڭ ھەر ئىككىسى ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە بولغانلىقتىن، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر تۈز سىزىقنى x، y كە دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولىدۇ.

ئەمدى (2) مەسىلىنى مۇھاكىمە قىلىمىز. خالىغان بىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە

③ $\quad$ (A، B لار بىرلا ۋاقىتتا 0 گە تەڭ بولمايدۇ) $\quad Ax+By+C=0$

گە نىسبەتەن، ئۇنىڭ بىر تۈز سىزىقنى ئىپادىلەيدىغان ـ ئىپادىلىمەيدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشتا، ئۇنى تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنىڭ مەلۇم بىر خىل شەكلىگە ئايلاندۇرۇشقا بولىدىغان ـ بولمايدىغانلىقىغا قارايمىز.

$B\neq 0$ بولغاندا، تەڭلىمە ③ نى تۆۋەندىكىدەك ئۆزگەرتىشكە بولىدۇ:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

بۇ، $\left(0,\ -\frac{C}{B}\right)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، يانتۇلۇقى $-\frac{A}{B}$ بولغان تۈز سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ.

مۇلاھىزە ؟

$B=0$ بولغاندا، ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟

يۇقىرىقىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، x، y كە دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە ھامان بىر تۈز سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ.

بىز x، y كە دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە

$$\boxed{Ax+By+C=0} \qquad (5)$$

(بۇنىڭدا A، B لار بىرلا ۋاقىتتا 0 گە تەڭ بولمايدۇ) نى **تۈز سىزىقنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى**، قىسقىچە **ئومۇمىي كۆرۈنۈشى** (general form) دەپ ئاتايمىز.

ئىزدىنىش

تەڭلىمە $Ax+By+C=0$ دە، A، B، C لار قانداق قىممەتنى ئالغاندا، تەڭلىمە تۆۋەندىكى تۈز سىزىقلارنى ئىپادىلەيدۇ:

① x ئوققا پاراللېل؛ $\qquad$ ② y ئوققا پاراللېل؛

③ x ئوق بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ؛ $\qquad$ ④ y ئوق بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ.

5 ـ مىسال. تۈز سىزىقنىڭ $A(6,\ -4)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى، يانتۇلۇقى $-\frac{4}{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى ۋە ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: $A(6,\ -4)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، يانتۇلۇقى $-\frac{4}{3}$ كە تەڭ بولغان تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە

يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى:

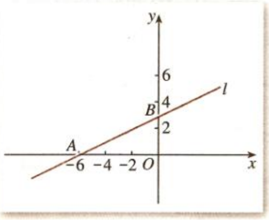
$$y+4=-\frac{4}{3}(x-6).$$

بۇنى ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىگە ئايلاندۇرساق، تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$4x+3y-12=0.$$

6 ـ مىسال. l تۈز سىزىقنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى $x-2y+6=0$ نى يانتۇلۇق ۋە كەسمە بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىگە ئايلاندۇرۇپ، l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى بىلەن ئۇنىڭ x ئوق ۋە y ئوقتىكى كەسمىلىرىنى تاپايلى ھەمدە شەكلىنى سىزايلى.

تەھلىل: l تۈز سىزىقنىڭ x ئوقتىكى كەسمە ئارىلىقىنى تېپىش l تۈز سىزىق بىلەن x ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ئابسىسساسىنى تېپىش دېگەنلىكتۇر. l تۈز سىزىق بىلەن x ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنى $A(a, 0)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $(a, 0)$ نۇقتا l نىڭ تەڭلىمىسىگە ماس كېلىدۇ. l نىڭ تەڭلىمىسىدە $y=0$ دەپ ئالساق، x نىڭ قىممىتىنى تېپىپ چىققىلى بولىدۇ، يەنى a بولىدۇ.



7.2.3 ـ رەسىم

تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا تۈز سىزىق سىزغاندا، ئادەتتە تۈز سىزىق بىلەن ئىككى كوئوردىنات ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنى تېپىپ چىقىشقا توغرا كېلىدۇ.

يېشىش: l تۈز سىزىقنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىنى يانتۇلۇق ۋە كەسمە بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىگە ئايلاندۇرساق مۇنداق بولىدۇ:

$$y=\frac{1}{2}x+3.$$

شۇڭا، l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $k=\frac{1}{2}$ بولۇپ، ئۇنىڭ y ئوقتىكى كەسمىسى 3 بولىدۇ.

l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $x-2y+6=0$ دە، $y=0$ دەپ ئالساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x=-6,$$

يەنى l تۈز سىزىقنىڭ x ئوقتىكى كەسمىسى 6 ـ بولىدۇ.

يۇقىرىقىلاردىن l تۈز سىزىقنىڭ x ئوق، y ئوقلار بىلەن كېسىشىش نۇقتىسى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا

$$A(-6, 0),\quad B(0, 3)$$

بولىدۇ، A، B ئىككى نۇقتا ئارقىلىق تۈز سىزىق ئۆتكۈزسەك، l تۈز سىزىقنىڭ شەكلىگە ئىگە بولىمىز (7.2.3 ـ رەسىم).

شۇڭا، بىز گېئومېترىيە نۇقتىسىدىن تۇرۇپ ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنى كۆزىتەلەيمىز، يەنى ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك بىر تەڭلىمە بىر تۈز سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ.

ئالگېبرادا تەڭلىمىلەرنى مۇھاكىمە قىلغاندا، نۇقتىلىق ھالدا تەڭلىمىنىڭ يېشىمىنى مۇھاكىمە قىلىمىز. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ ھەربىر گۇرۇپپا يېشىمىنى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى بىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى دەپ قاراشقا بولىدۇ، بۇ تەڭلىمىنىڭ بارلىق

يېشىملىرىدىن تەركىب تاپقان توپلام دەل كوئوردېناتلىرى بۇ ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنى قانائەتلەندۈرىدىغان بارلىق نۇقتىلارنىڭ توپلىمىدىن ئىبارەت بولۇپ، بۇ نۇقتىلارنىڭ توپلىمى بىر تۈز سىزىقنى ھاسىل قىلىدۇ.

تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تەڭلىمە بىلەن تۈز سىزىقنى ئۆزئارا باغلاپ تۇرىدىغان كۆۋرۈك، بۇ دېكارت[1] نىڭ ئۇلۇغ تۆھپىسى. دېكارت بىز ئۈچۈن ئالاھىدە ياساپ بەرگەن بۇ «كۆز ئەينەك» (يەنى ئانالىتىك گېئومېترىيىلىك قاراش) بىلەن كۆزەتسەك، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا بەلگىلەنگەن بىر تۈز سىزىقتىن ئىبارەت.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنى يېزىپ چىقىڭ ھەمدە ئۇنى ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىگە ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $A(8, -2)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ، يانتۇلۇقى $-\frac{1}{2}$؛

(2) $B(4, 2)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ، x ئوققا پاراللېل؛

(3) $P_1(3, -2)$، $P_2(5, -4)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ؛

(4) x ئوق، y ئوقتىكى كەسمىسى ئايرىم ـ ئايرىم $\frac{3}{2}$، -3.

2. تۆۋەندىكى تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇقى ۋە y ئوقتىكى كەسمىسىنى تېپىڭ ھەمدە شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ:

(1) $3x+y-5=0$;

(2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$;

(3) $x+2y=0$;

(4) $7x-6y+4=0$.

3. l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $Ax+By+C=0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن،

(1) $B\neq 0$ بولغاندا، l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى قانچە بولىدۇ؟ $B=0$ بولغاندىچۇ؟

(2) كوئېففىتسېنت A، B، C لار قانداق قىممەتنى ئالغاندا، تەڭلىمە $Ax+By+C=0$ كوئوردېنات بېشىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ؟

[1] فرانسىيە ماتېماتىكى، ئانالىتىك گېئومېترىيىنى بەرپا قىلغۇچىلارنىڭ بىرى.

2.3 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى يېزىڭ.

(1) يانتۇلۇقى $\frac{\sqrt{3}}{3}$، $A(8,\ -2)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(2) $B(-2,\ 0)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە x ئوققا تىك؛

(3) يانتۇلۇقى -4، y ئوقتىكى كەسمىسى 7؛

(4) $A(-1,\ 8)$، $B(4,\ -2)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(5) y ئوقتىكى كەسمىسى 2 ھەمدە x ئوق بىلەن پاراللېل؛

(6) x ئوق، y ئوقتىكى كەسمىسى ئايرىم - ئايرىم 4، -3.

2. $A(1,\ 3)$، $B(5,\ 7)$، $C(10,\ 12)$ ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش ياكى ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

3. $A(7,-4)$، $B(-5,\ 6)$ ئىككى نۇقتا بېرىلگەن، AB كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4. $\triangle ABC$ نىڭ چوققىلىرى $A(8,\ 5)$، $B(4,-2)$، $C(-6,\ 3)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، AB تەرەپ بىلەن AC تەرەپنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

5. $A(2,\ -3)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇقى تۈز سىزىق $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ نىڭ يانتۇلۇقىنىڭ 2 ھەسسىسىگە تەڭ بولغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

6. بىر پۇرژىنىغا 4N ئېغىرلىقتىكى جىسىمنى ئاسقاندا، ئۇزۇنلۇقى 20cm بولىدۇ. ئېلاستىكلىق چېكى ئىچىدە، ئېسىلغان جىسىمنىڭ ئېغىرلىقى ھەر 1N ئاشسا، پۇرژىنا 1.5cm سوزۇلىدۇ. پۇرژىنىنىڭ ئۇزۇنلۇقى l (cm) بىلەن ئېسىلغان جىسىمنىڭ ئېغىرلىقى G (N) ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت تەڭلىمىسىنى يېزىپ چىقىڭ.

7. بىر تۆمۈر تاياقچىنىڭ 40℃ تىكى ئۇزۇنلۇقى 12.506m، 80℃ تىكى ئۇزۇنلۇقى 12.512m. ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇق l (m) بىلەن تېمپېراتۇرا t (℃) ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى تۈز سىزىق تەڭلىمىسى ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقى بېرىلگەن، بۇ تەڭلىمىنى ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشى ئارقىلىق ئىپادىلەڭ ھەمدە بۇ تەڭلىمىگە ئاساسەن، بۇ تۆمۈر تاياقچىنىڭ 100℃ تىكى ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

8. رومبىنىڭ ئىككى دىئاگونالى ئايرىم - ئايرىم ھالدا x ئوق ۋە y ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، ئۇلارنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم ھالدا 8 ۋە 6 ئىكەنلىكى بېرىلگەن، رومبىنىڭ ھەرقايسى تەرەپلىرى ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

9. $P(2,\ 3)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە ئىككى ئوق ئۈستىدىكى كەسمىلىرى ئۆزئارا تەڭ بولغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

10. تۆۋەندىكى شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) $A(3, 2)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە تۈز سىزىق $4x+y-2=0$ بىلەن پاراللېل؛

(2) $C(2, -3)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە $M(1, 2)$ ۋە $N(-1, -5)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىققا پاراللېل؛

(3) $B(3, 0)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە تۈز سىزىق $2x+y-5=0$ گە تىك.

11. بىر نۇر $P(6, 4)$ نۇقتىدىن چىقىپ x ئوق بىلەن $Q(2, 0)$ نۇقتىدا كېسىشىدۇ ھەمدە x ئوقتىن قايتىدۇ، چۈشكەن نۇر ۋە قايتقان نۇر ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ چوققىسى $A(4, 0)$، $B(6, 7)$، $C(0, 3)$.

(1) BC تەرەپنىڭ ئېگىزلىكى ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ؛

(2) BC تەرەپتىكى مېدىئانا ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ؛

(3) BC تەرەپنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2. تۈز سىزىق $Ax+By+C=0$ (A، B لار بىرلا ۋاقىتتا 0 گە تەڭ بولمايدۇ) نىڭ كوئېففىتسېنتى A، B، C لار قانداق مۇناسىۋەتنى قانائەتلەندۈرگەندە، بۇ تۈز سىزىق تۆۋەندىكى خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە بولىدۇ:

(1) ئىككى كوئوردىنات ئوقىنىڭ ھەر ئىككىسى بىلەن كېسىشىدۇ؛

(2) پەقەت x ئوق بىلەنلا كېسىشىدۇ؛

(3) پەقەت y ئوق بىلەنلا كېسىشىدۇ؛

(4) x ئوق ياتقان تۈز سىزىقتىن ئىبارەت؛

(5) y ئوق ياتقان تۈز سىزىقتىن ئىبارەت.

3. $P(x_0, y_0)$ نۇقتىنى تۈز سىزىق $Ax+By+C=0$ نىڭ ئۈستىدە دەپ پەرەز قىلىپ، بۇ تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تۆۋەندىكىدەك كۆرۈنۈشتە يېزىشقا بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

4. تۈز سىزىق l_1، l_2 لەرنىڭ تەڭلىمىسى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا

$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ (A_1، B_1 لار بىرلا ۋاقىتتا 0 گە تەڭ بولمايدۇ)

$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ (A_2، B_2 لەر بىرلا ۋاقىتتا 0 گە تەڭ بولمايدۇ)

ھەمدە $A_1A_2+B_1B_2=0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $l_1 \perp l_2$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

5. ئەگەر l تۈز سىزىق x ئوقنى بويلاپ سولغا 3 بىرلىك پاراللېل يۆتكىلىپ، ئاندىن y ئوقنى بويلاپ يۇقىرىغا 1 بىرلىك پاراللېل يۆتكەلگەندىن كېيىن ئەسلىدىكى ئورنىغا قايتىپ كەلسە، l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنى تېپىڭ.

6. ئۈچۈر تېخنىكىسى قوراللىرىدىن پايدىلىنىپ تۈز سىزىق $l: 2x-y+3=0$ نى سىزىڭ ھەمدە تەكشىلىكتە بىرنەچچە نۇقتىنى ئېلىپ، ئۇلارنىڭ كوئوردىناتلىرىنى ئۆلچەپ، بۇ نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتلىرىنى $2x-y+3$ كە قويۇپ، ئۇنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ، قانداق قانۇنىيەت بارلىقىنى كۆزىتىڭ.

3-3 تۈز سىزىقلارنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتى ۋە ئارىلىق فورمۇلىسى

CHAPTER

تەكشىلىكتىكى گېئومېترىيىدە، بىز پەقەت تۈز سىزىققا قارىتا خۇسۇسىيەتنى بېكىتىش تەتقىقاتىنى ئېلىپ بارالايمىز. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى كىرگۈزۈلگەندىن كېيىن، تۈز سىزىقنى تەڭلىمە ئارقىلىق ئىپادىلەيمىز، تۈز سىزىق تەڭلىمىسى تۈز سىزىق ئۈستىدىكى ھەربىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى قانائەتلەندۈرىدىغان بىر خىل مۇناسىۋەت ئىپادىسىدىن ئىبارەت، يەنى ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك بىر تەڭلىمىدۇر. شۇنداق قىلىپ، تۈز سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىلارنى تەڭلىمە ئارقىلىق ئىگىلەيمىز، تۈز سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىلارنى ئالگېبرالىق ئۇسۇل ئارقىلىق تەتقىق قىلىپ، تۈز سىزىقنى مىقدار جەھەتتىن تەتقىق قىلىمىز.

ئالدىنقى پاراگرافتا، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇپ چىقتۇق. بۇ پاراگرافتا، تۈز سىزىق تەڭلىمىسى ئارقىلىق، تۈز سىزىققا ئالاقىدار مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىمىز، بۇ، ئىككى تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى، ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىش، ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى، نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقنى ھەمدە ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق ئارىسىدىكى ئارىلىقنى تېپىش قاتارلىقلارنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ.

3-3-1 ئىككى تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتى

مۇلاھىزە؟

ئىككى تۈز سىزىق

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

نىڭ ئۆزئارا كېسىشىدىغانلىقى بېرىلگەن، بۇ ئىككى تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى قانداق تېپىش كېرەك؟

تۆۋەندىكى جەدۋەلنى كۆزىتىڭ ۋە ئۇنى تولدۇرۇڭ.

ئالگېبرالىق ئىپادىلەش	گېئومېترىيىلىك ئېلېمېنت ۋە مۇناسىۋەت
$A(a, b)$	نۇقتا A
$l: Ax + By + C = 0$	تۈز سىزىق l
	نۇقتا A تۈز سىزىق l نىڭ ئۈستىدە
	تۈز سىزىق l_1 بىلەن تۈز سىزىق l_2 نىڭ كېسىشىش نۇقتىسى A

ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىككى تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردېناتىنى تېپىشتا، پەقەت بۇ ئىككى تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى يېزىپ چىقىپ، ئاندىن ئۇلاردىن تەڭلىمىلەر سىستېمىسى تۈزۈپ، يېشىمىنى تېپىپ چىقساقلا بولىدۇ.

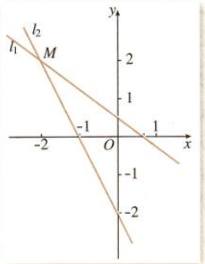
ئومۇمەن، ئىككى تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىدىن تۆۋەندىكى تەڭلىمىلەر سىستېمىسىغا ئېرىشىمىز:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

ئەگەر تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ بىرلا يېشىمى بار بولسا، ئۇ ھالدا ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا كېسىشىدۇ، بۇ يېشىم دەل كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردېناتى بولىدۇ؛ ئەگەر تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ يېشىمى بولمىسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمايدۇ، بۇ چاغدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا پاراللېل بولىدۇ.

1 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ئىككى تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردېناتىنى تاپايلى:

$$l_1:\ 3x+4y-2=0,$$
$$l_2:\ 2x+y+2=0.$$



1.3.3 ـ رەسىم

يېشىش: تەڭلىمىلەر سىستېمىسى:

$$\begin{cases} 3x+4y-2=0, \\ 2x+y+2=0, \end{cases}$$

نى يەشسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\begin{cases} x=-2, \\ y=2. \end{cases}$$

شۇڭا l_1 بىلەن l_2 نىڭ كېسىشىش نۇقتىسى $M(-2,\ 2)$ (1.3.3 ـ رەسىم).

ئىزدىنىش

λ ئۆزگەرگەندە، تەڭلىمە

$$3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$$

قانداق شەكىلنى ئىپادىلەيدۇ؟ بۇ شەكىلنىڭ قانداق ئالاھىدىلىكى بار؟

2 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ھەربىر جۈپ تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلايلى. ئەگەر ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇلارنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردېناتىنى تاپايلى:

(1) $l_1:\ x-y=0,\qquad l_2:\ 3x+3y-10=0;$

(2) $l_1:\ 3x-y+4=0\qquad l_2:\ 6x-2y-1=0;$

(3) $l_1:\ 3x+4y-5=0,\quad l_2:\ 6x+8y-10=0.$

يېشىش: (1) تەڭلىمىلەر سىستېمىسى:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 3x+3y-10=0, \end{cases}$$

نى يەشسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{3}, \\ y = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

شۇڭا، l_1 بىلەن l_2 ئۆزئارا كېسىشىدۇ، كېسىشىش نۇقتىسى $M\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$.

(2) تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases} 3x - y + 4 = 0, & ① \\ 6x - 2y - 1 = 0, & ② \end{cases}$$

نى يېشىمىز،

② − 2 × ① دىن $0 = 9$ گە ئىگە بولىمىز، بۇ ئۆزئارا زىت.

تەڭلىمىلەر سىستېمىسى يېشىمگە ئىگە ئەمەس، شۇڭا ئىككى تۈز سىزىق ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس، $l_1 \parallel l_2$.

(3) تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5 = 0, & ① \\ 6x + 8y - 10 = 0, & ② \end{cases}$$

نى يېشىمىز،

① × 2 دىن $6x + 8y - 10 = 0$ گە ئىگە بولىمىز.

شۇڭا، ① ۋە ② نى ئوخشاش بىر تەڭلىمىگە ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ، يەنى ① بىلەن ② ئوخشاش بىر تۈز سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ، l_1 بىلەن l_2 ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھەربىر جۈپ تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ ھەمدە شەكلىنى سىزىڭ:

(1) l_1: $2x + 3y = 12$,　　l_2: $x - 2y = 4$;

(2) l_1: $x = 2$,　　l_2: $3x + 2y - 12 = 0$.

2. تۆۋەندىكى ھەربىر جۈپ تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ. ئەگەر ئۆزئارا كېسىشسە كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) l_1: $2x - 3y = 7$,　　l_2: $4x + 2y = 1$;

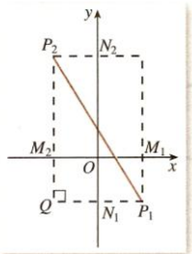
(2) l_1: $2x - 6y + 4 = 0$,　　l_2: $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$;

(3) l_1: $(\sqrt{2} - 1)x + y = 3$,　　l_2: $x + (\sqrt{2} + 1)y = 2$.

2-3-3 ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق

مۇلاھىزە ؟

تەكشىلىكتىكى ئىككى نۇقتا $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ بېرىلگەن، P_1 بىلەن P_2 نىڭ ئارىلىقى $|P_1P_2|$ نى قانداق تېپىش كېرەك؟



2.3.3 ـ رەسىم

2.3.3 ـ رەسىمدىكىدەك، P_1، P_2 نۇقتىلاردىن ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا y ئوق ۋە x ئوقنىڭ تىك سىزىقى P_1N_1 ۋە P_2M_2 لەرنى ئۆتكۈزسەك، تىك ئاساسى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $N_1(0, y_1)$ ۋە $M_2(x_2, 0)$ بولىدۇ. تۈز سىزىق P_1N_1 بىلەن P_2M_2 ئۆزئارا Q نۇقتىدا كېسىشىدۇ.

Rt △ P_1QP_2 دە،

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

$|P_1Q|$ ۋە $|QP_2|$ نى ھېسابلاش ئۈچۈن، P_1 نۇقتا ئارقىلىق x ئوقنىڭ تىك سىزىقىنى ئۆتكۈزسەك، تىك ئاساسى $M_1(x_1, 0)$ بولىدۇ؛ P_2 نۇقتا ئارقىلىق y ئوقنىڭ تىك سىزىقىنى ئۆتكۈزسەك، تىك ئاساسى $N_2(0, y_2)$ بولىدۇ. شۇڭا،

$$|P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|.$$

شۇڭا، $|P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$.

بۇنىڭدىن $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسىغا ئىگە بولىمىز:

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .}$$

ئالاھىدە ئەھۋالدا، كوئوردىنات بېشى $O(0, 0)$ بىلەن خالىغان بىر $P(x, y)$ نۇقتىنىڭ ئارىلىقى مۇنداق بولىدۇ:

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

3 ـ مىسال. $A(-1, 2)$، $B(2, \sqrt{7})$ نۇقتىلار بېرىلگەن، x ئوق ئۈستىدىن $|PA|=|PB|$ بولىدىغان بىر P نۇقتىنى ھەمدە $|PA|$ نىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

يېشىش: تاپماقچى بولغان نۇقتىنى $P(x, 0)$ دەپ پەرەز قىلساق، تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$|PA|=\sqrt{(x+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{x^2+2x+5}\ ,$$

$$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(0-\sqrt{7})^2}=\sqrt{x^2-4x+11}\ ,$$

$|PA|=|PB|$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

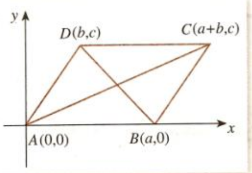
$$x^2+2x+5=x^2-4x+11,$$

بۇنى يەشسەك $x=1$ كېلىپ چىقىدۇ.

شۇڭا، تاپماقچى بولغان نۇقتا $P(1, 0)$ بولىدۇ ھەمدە

$$|PA| = \sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

4 ـ مىسال. پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ تۆت تەرىپىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسى ئۇنىڭ ئىككى دىئاگونالىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.



3.3.3 ـ رەسىم

پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن، C نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(a+b, c)$ غا قانداق ئېرىشكىلى بولىدۇ؟

تەھلىل: ئالدى بىلەن مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇۋالىمىز، كوئوردىناتلار ئارقىلىق ئالاقىدار مىقدارلارنى ئىپادىلەپ، ئاندىن ئالگېبرالىق ھېسابلاشلارنى ئېلىپ بارىمىز، ئاخىرىدا ئالگېبرالىق ھېسابلاشنىڭ نەتىجىسىنى گېئومېترىيىلىك مۇناسىۋەتكە «تەرجىمە قىلىمىز».

ئىسپات: 3.3.3 ـ رەسىمدىكىدەك، A چوققىنى كوئوردىنات بېشى، AB تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنى x ئوق قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزساق، $A(0, 0)$ بولىدۇ.

$B(a, 0)$، $D(b, c)$ دەپ پەرەز قىلساق، پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن C نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(a+b, c)$ غا ئىگە بولىمىز.

$$\because\ |AB|^2=a^2,\quad |CD|^2=a^2,$$
$$|AD|^2=b^2+c^2,\quad |BC|^2=b^2+c^2,$$
$$|AC|^2=(a+b)^2+c^2,\quad |BD|^2=(b-a)^2+c^2,$$
$$\therefore\ |AB|^2+|CD|^2+|AD|^2+|BC|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$
$$|AC|^2+|BD|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$
$$\therefore\ |AB|^2+|CD|^2+|AD|^2+|BC|^2=|AC|^2+|BD|^2.$$

شۇڭا، پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ تۆت تەرىپىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسى ئۇنىڭ ئىككى دىئاگونالىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولىدۇ.

يۇقىرىدىكى مەسىلىنى ھەل قىلىشنىڭ ئاساسىي قەدەم باسقۇچلىرىنى تۆۋەندىكىدەك يىغىنچاقلاشقا بولىدۇ.

بىرىنچى قەدەم: كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇش، كوئوردىناتلاردىن پايدىلىنىپ ئالاقىدار مىقدارلارنى ئىپادىلەش. ← ئىككىنچى قەدەم: ئالاقىدار ئالگېبرالىق ھېسابلاشلارنى ئېلىپ بېرىش. ← ئۈچىنچى قەدەم: ئالگېبرالىق ھېسابلاش نەتىجىسىنى گېئومېترىيىلىك مۇناسىۋەتكە «تەرجىمە قىلىش».

مۇلاھىزە؟

4 ـ مىسالدا، يەنە باشقا كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇش ئۇسۇلى بارمۇ؟ ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن پىكىر ئالماشتۇرۇڭ، سىز مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇشنىڭ ئىسپاتلاشتىكى مۇھىملىقىنى ھېس قىلالىدىڭىزمۇ؟

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھەر ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى تېپىڭ:

(1) $A(6,0)$, $B(-2,0)$; (2) $C(0,-4)$, $D(0,-1)$;

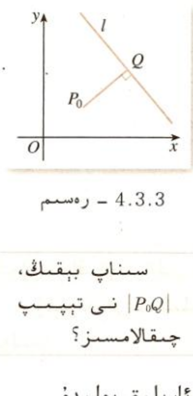
(3) $P(6,0)$, $Q(0,-2)$; (4) $M(2,1)$, $N(5,-1)$.

2. $A(a,-5)$، $B(0,10)$ ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنىڭ 17 ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3-3-3 نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق

مۇلاھىزە ؟

4.3.3 - رەسىمدىكىدەك، $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتا، تۈز سىزىق $l: Ax+By+C=0$ بېرىلگەن، P_0 نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقنى قانداق تېپىش كېرەك؟



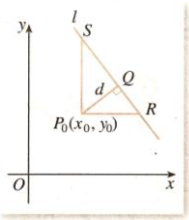
4.3.3 ـ رەسىم

P_0 نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق، P_0 نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان تىك كېسىك P_0Q نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى كۆرسىتىدۇ، بۇنىڭدا Q تىك ئاساسى (4.3.3 ـ رەسىم).

$P_0Q \perp l$ ھەمدە l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $-\frac{A}{B}$ دىن l تۈز سىزىقنىڭ تىك سىزىقى P_0Q نىڭ يانتۇلۇقى $\frac{B}{A}$ بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز، شۇڭا تىك سىزىق P_0Q نىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىپ چىقىشقا بولىدۇ. P_0Q تۈز سىزىق بىلەن l تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى، يەنى تىك ئاساسى Q نىڭ كوئوردىناتىنىمۇ تېپىپ چىققىلى بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن P_0 بىلەن Q نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق $|P_0Q|$ نى تېپىپ چىققىلى بولىدۇ، P_0Q نىڭ ئۇزۇنلۇقى دەل P_0 نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق بولىدۇ.

سىناپ بېقىڭ، $|P_0Q|$ نى تېپىپ چىقالامسىز؟

يۇقىرىقى ئۇسۇلدىكى پىكىر يولى ناھايىتى تەبىئىي بولسىمۇ، ئەمما كونكرېت ھېسابلاش بىرقەدەر مۇرەككەپ، شۇڭا تۆۋەندە بىز يەنە بىر خىل ئۇسۇلنى قوللىنىمىز.



5.3.3 ـ رەسىم

5.3.3 ـ رەسىمدىكىدەك، $A\neq0$، $B\neq0$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا l تۈز سىزىق x ئوق ۋە y ئوقنىڭ ھەر ئىككىسى بىلەن كېسىشىدۇ، P_0 نۇقتا ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا x ئوق ۋە y ئوقنىڭ پاراللېل سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، ئۇ l تۈز سىزىق بىلەن R ۋە S نۇقتىدا كېسىشىدۇ، شۇنىڭ بىلەن P_0R تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $y=y_0$، R نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $\left(-\frac{By_0+C}{A}, y_0\right)$ بولىدۇ؛ P_0S تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $x=x_0$، S

نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $\left(x_0,\ -\dfrac{Ax_0+C}{B}\right)$ بولىدۇ.

شۇڭا

$$|P_0R|=\left|-\frac{By_0+C}{A}-x_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|A|},$$

$$|P_0S|=\left|-\frac{Ax_0+C}{B}-y_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|B|},$$

$$|RS|=\sqrt{|P_0R|^2+|P_0S|^2}=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{|A|\,|B|}|Ax_0+By_0+C|.$$

$|P_0Q|=d$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزىنى تېپىش فورمۇلىسىدىن تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$$d\cdot|RS|=|P_0R|\cdot|P_0S|,$$

بۇنىڭدىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$d=\frac{|P_0R|\cdot|P_0S|}{|RS|}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

شۇڭا، $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن تۈز سىزىق $l: Ax+By+C=0$ گىچە بولغان ئارىلىق:

$A=0$ ياكى $B=0$ بولغاندا، يۇقىرىدىكى فورمۇلا كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

ئىسپاتلاشقا بولىدۇكى، $A=0$ ياكى $B=0$ بولغاندا، يۇقىرىدىكى فورمۇلا يەنىلا كۈچكە ئىگە بولىدۇ.

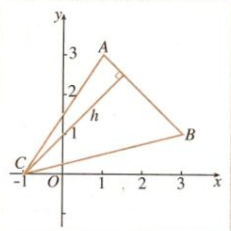
5 ـ مىسالنى باشقىچە يېشىش ئۇسۇلى بارمۇ؟

5 ـ مىسال. $P_0(-1, 2)$ نۇقتىدىن تۈز سىزىق $l: 3x=2$ گىچە بولغان ئارىلىقنى تاپايلى.

يېشىش:

$$d=\frac{|3\times(-1)-2|}{\sqrt{3^2+0^2}}=\frac{5}{3}.$$

6 ـ مىسال. $A(1, 3)$، $B(3, 1)$، $C(-1, 0)$ نۇقتىلار بېرىلگەن، $\triangle ABC$ نىڭ يۈزىنى تاپايلى.



6.3.3 ـ رەسىم

يېشىش: 6.3.3 ـ رەسىمدىكىدەك، AB تەرەپتىكى ئېگىزلىكنى h دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h.$$

$$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2},$$

AB تەرەپتىكى ئېگىزلىك h دەل C نۇقتىدىن AB غىچە بولغان ئارىلىقتىن ئىبارەت.

AB تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى:

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{3-1},$$

يەنى $x+y-4=0$.

$C(-1,0)$ نۇقتىدىن $x+y-4=0$ گىچە بولغان ئارىلىق:

$$h=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=5.$$

6 ـ مىسالنى باشقىچە يېشىش ئۇسۇلى بارمۇ؟

مەشىق

1. كوئوردىنات بېشىدىن تۆۋەندىكى تۈز سىزىقلارغىچە بولغان ئارىلىقنى تېپىڭ:

(1) $3x+2y-26=0$;　　(2) $x=y$.

2. تۆۋەندىكى نۇقتىلاردىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقنى تېپىڭ:

(1) $A(-2,3)$,　　l: $3x+4y+3=0$;

(2) $B(1,0)$,　　l: $\sqrt{3}\,x+y-\sqrt{3}=0$;

(3) $C(1,-2)$,　　l: $4x+3y=0$.

4-3-3 ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق ئارىسىدىكى ئارىلىق

ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق ئارىسىدىكى ئارىلىق ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق ئارىسىدىكى ئومۇمىي تىك كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى كۆرسىتىدۇ.

ئىزدىنىش

تۈز سىزىق $l_1 \,/\!/\, l_2$ دەپ پەرەز قىلساق، l_1 بىلەن l_2 ئارىسىدىكى ئارىلىقنى قانداق تېپىش كېرەك؟

(1) پاراللېل تۈز سىزىقلار ئارىسىدىكى ئارىلىقنى نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىققا ئايلاندۇرغىلى بولامدۇ؟

(2) نۇقتىنى قانداق ئالغاندا، ھېسابلاش ئاددىي بولىدۇ؟

7 ـ مىسال. تۈز سىزىق l_1: $2x-7y-8=0$، l_2: $6x-21y-1=0$ لەر بېرىلگەن، l_1 بىلەن l_2 پاراللېلمۇ؟ ئەگەر پاراللېل بولسا، l_1 بىلەن l_2 ئارىسىدىكى ئارىلىقنى تاپايلى.

يېشىش: l_1 نىڭ يانتۇلۇقى $k_1=\frac{2}{7}$، l_2 نىڭ يانتۇلۇقى $k_2=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$.

چۈنكى $k_1=k_2$، شۇڭا $l_1 \,/\!/\, l_2$.

ئاۋۋال l_1 بىلەن x ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى A نىڭ كوئوردىناتىنى تاپىمىز، A نۇقتىنىڭ

7 ـ مىسالدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق ئارىسىدىكى ئارىلىقنى نۇقتىدىن تۈز سىزىقچە بولغان ئارىلىققا ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ.

كوئوردىناتى (4, 0) بولىدۇ. A نۇقتىدىن l_2 تۈز سىزىقچە بولغان ئارىلىق:

$$d=\frac{|6\times4-21\times0-1|}{\sqrt{6^2+21^2}}=\frac{23}{3\sqrt{53}}=\frac{23}{159}\sqrt{53}.$$

شۇڭا l_1 بىلەن l_2 ئارىسىدىكى ئارىلىق $\frac{23}{159}\sqrt{53}$.

مەشىق

تۆۋەندىكى ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق ئارىسىدىكى ئارىلىقنى تېپىڭ:

(1) $2x+3y-8=0$, $2x+3y+18=0$;

(2) $3x+4y=10$, $3x+4y=0$.

3.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ھەربىر جۈپ تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ. ئەگەر ئۇلار ئۆزئارا كېسىشسە، كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) $2x-y+7=0$, $x+y=1$;

(2) $x-3y-10=0$, $y=\frac{x+5}{3}$;

(3) $3x-5y+10=0$, $9x-15y+30=0$.

2. A بىلەن C قانداق قىممەتنى ئالغاندا، تۈز سىزىق $Ax-2y-1=0$ بىلەن تۈز سىزىق $6x-4y+C=0$:

(1) پاراللېل بولىدۇ؛ (2) ئۆزئارا كېسىشىدۇ؛ (3) ئۆزئارا تىك بولىدۇ.

3. تۆۋەندىكى ئىككى تۈز سىزىق بېرىلگەن

l_1: $(3+m)x+4y=5-3m$,

l_2: $2x+(5+m)y=8$,

m قانداق قىممەتنى ئالغاندا، l_1 بىلەن l_2:

(1) ئۆزئارا كېسىشىدۇ؛ (2) پاراللېل بولىدۇ؛ (3) ئۆزئارا تىك بولىدۇ.

4. تۈز سىزىق l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ بىلەن l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$ نىڭ ئۆزئارا كېسىشىدىغانلىقى بېرىلگەن، تەڭلىمە

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0\ (\lambda\in\mathbf{R})$$

نىڭ l_1 بىلەن l_2 نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىدىن ئۆتىدىغان تۈز سىزىقنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

5. تۆۋەندىكى شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) ئىككى تۈز سىزىق $2x-3y+10=0$ بىلەن $3x+4y-2=0$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىدىن

ئۆتىدۇ ھەمدە تۈز سىزىق $3x-2y+4=0$ گە تىك؛

(2) ئىككى تۈز سىزىق $2x+y-8=0$ بىلەن $x-2y+1=0$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە تۈز سىزىق $4x-3y-7=0$ گە پاراللېل.

6. $A(1, 2)$، $B(2, 0)$، $P(0, 3)$، $Q(-1, 1)$، $M(1, 0)$، $N(-4, 0)$ ئالتە نۇقتا بېرىلگەن، كېسىك AB، PQ، MN لار ئارقىلىق بىر ئۈچبۇلۇڭ قورشاشقا بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

7. $P(a, 2)$، $Q(-2, -3)$، $M(1, 1)$ نۇقتىلار ھەمدە $|PQ|=|PM|$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

8. (1) x ئوقنىڭ ئۈستىدىكى $A(5, 12)$ نۇقتىغىچە ئارىلىقى 13 بولغان نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ؛

(2) P نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى 7، P نۇقتىدىن $N(-1, 5)$ نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىق 10 غا تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، P نۇقتىنىڭ ئوردىناتىنى تېپىڭ.

9. $P(-5, 7)$ نۇقتىدىن $12x+5y-3=0$ تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقنى تېپىڭ.

10. ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق $3x-2y-1=0$ بىلەن $3x-2y+1=0$ ئارىسىدىكى ئارىلىقنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. ئۈچ تۈز سىزىق $ax+2y+8=0$، $4x+3y=10$ ۋە $2x-y=10$ لەر ئۆزئارا بىر نۇقتىدا كېسىشسە، a نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

2. $A(a, 6)$ نۇقتىدىن $3x-4y=2$ تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق d نىڭ تۆۋەندىكى قىممەتلىرى بېرىلگەن، a نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $d=4$;　　(2) $d>4$.

3. ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق $Ax+By+C_1=0$ بىلەن $Ax+By+C_2=0$ ئارىسىدىكى ئارىلىق

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

4. $A(-3, -4)$، $B(6, 3)$ نۇقتىلاردىن تۈز سىزىق $l: ax+y+1=0$ گىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ ئۆزئارا تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

5. x ئوق ئۈستىدىن بىر P نۇقتىنى تېپىڭ، نەتىجىدە $A(1, 2)$، $B(3, 4)$ ۋە P نۇقتىلارنى چوققا قىلغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزى 10 بولسۇن.

6. تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ يانتۇ تەرىپىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىدىن ئۈچ چوققىسىغىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ ئۆزئارا تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

7. AO بولسا $\triangle ABC$ نىڭ BC تەرەپتىكى مېدىيانىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

8. $0<x<1$، $0<y<1$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن،

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$$

بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ ھەمدە تەڭلىكنى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان شەرتنى تېپىڭ.

9. $\triangle ABC$ نىڭ چوققىسى $A(5, 1)$، AB تەرەپتىكى مېدىيانىسى CM ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $2x-y-5=0$، AC تەرەپتىكى ئېگىزلىكى BH ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $x-2y-5=0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن،

(1) C چوققىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ؛　　(2) BC تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

دېكارت ۋە ئانالىتىك گېئومېتىرىيە

دېكارت

فرانسىيە ماتېماتىكى دېكارت (Descartes، 1596 ~ 1650 ـ يىللار) ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنى بەرپا قىلغۇچىلارنىڭ بىرى، ئۇنىڭ مەركىزىي ئىدىيىسى ئالگېبرا بىلەن گېئومېتىرىيىنى بىرلەشتۈرۈشتىن ئىبارەت. ئۇ مۇنداق دەيدۇ: «مەن ئابستراكت گېئومېتىرىيىدىنلا ۋاز كېچىشنى قارار قىلدىم، يەنى بۇ دېگەنلىك، پەقەتلا ئىدىيىنى مەشىقلەندۈرىدىغان مەسىلىلەرنى ئەمدى ئويلاشمايمەن. مېنىڭ بۇنداق قىلىشىم يەنە بىر خىل گېئومېتىرىيىنى تەتقىق قىلىش ئۈچۈندۇر، يەنى تەبىئىي ھادىسىلەرنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەيدىغان گېئومېتىرىيىنى تېپىپ چىقىشنى مەقسەت قىلىمەن.» ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنىڭ بەرپا قىلىنىشى 17 ـ ئەسىردىكى پەن ـ تېخنىكا تەرەققىياتىنىڭ جىددىي ئېھتىياجىغا ماسلاشقان.

دېكارت ئۆز ۋاقتىدىكى گېئومېتىرىيىلىك ئۇسۇل بىلەن ئالگېبرالىق ئۇسۇلنى سېلىشتۇرۇپ، ئۇلارنىڭ ھەرقايسىسىنىڭ ئارتۇقچىلىقى ۋە كەمچىلىكلىرىنى تەھلىل قىلغان. ئۇ، ھېچقانداق نەرسە ئادەم مېڭىسىگە گېئومېتىرىيىلىك شەكىلدەك ئاسان ئورۇنلىشالمايدۇ، شەيئىلەرنى شەكىل ئارقىلىق ئىپادىلەش ئىنتايىن پايدىلىق دەپ قارايدۇ. ئەمما ئۇ ئېۋكلىد گېئومېتىرىيىسىدىكى نۇرغۇنلىغان تېئورېمىلار ئىسپاتىنىڭ بىرەر ئەپچىل چارە تېپىشقا ئېھتىياجلىق بولىدىغانلىقىدىن ناھايىتى خاتىرجەمسىزلەنگەن، ئۇ يەنە گرېتسىيىلىكلەرنىڭ گېئومېتىرىيىدە شەكىللەرگە بەك يۆلىنىۋالغانلىقىنىمۇ تەنقىد قىلغان. ئۇ ئالگېبرانىڭ كۆچىنى ھېس قىلىپ، ئالگېبرا كەڭ كۆلەملىك مېتودولوگىيە بىلەن تەمىنلەشتە ئېۋكلىد گېئومېتىرىيىسىدىن يۇقىرى تۇرىدۇ دەپ قارىغان. ئۇنىڭ قارىشىچە، ئالگېبرا ئومۇمىيلىققا ئىگە مەسىلەن، ھەرپنى سانلارنىڭ ئورنىغا قويغاندا، ھەر خىل سانلارنى، يەنى مۇسبەت سان، مەنپىي سان ۋە 0 نى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ؛ ئالگېبرادىكى فورمۇلىلار مەسىلە يېشىش جەريانىنى مېخانىكىلاشتۇرىدۇ؛ ئالگېبرادا بىر تۈرلۈك ئومۇمىي پەن ئۇسۇلى بولۇش يوشۇرۇن كۈچى بار.

ئۇ ئەسلىدە «ئىدىيىنىڭ يېتەكلەش قائىدىلىرى» دېگەن كىتابنى يېزىشنى پىلانلىغان، ئۇ كىتابىدا بارلىق مەسىلىلەرنى يېشەلەيدىغان بىر لايىھەنى، يەنى بارلىق مەسىلىلەرنى ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرگە يىغىنچاقلاش، بارلىق ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە يىغىنچاقلاش، بارلىق ئالگېبرالىق مەسىلىلەرنى تەڭلىمىگە يىغىنچاقلاش، ئەڭ ئاخىرىدا بىر نامەلۇمغا دائىر تەڭلىمىگە ئېرىشىشتىن ئىبارەت ئۇسۇلنى يورۇتۇپ بېرىشنى ئويلىغان. ئەمما، ئۇزاق ئۆتمەي ئۇ ئۆزى بۇ تەسەۋۋۇرنىڭ بەكمۇ يورۇتۇپ كېتىش بىلەن ئوتتۇرىغا قويۇلغانلىقىنى، ئۇنى ئەمەلگە ئاشۇرۇشنىڭ زادىلا مۇمكىن ئەمەسلىكىنى بايقاپ، بۇ كىتابنى يېزىپ تۈگەتمەيلا توختىتىپ قويغان (ئۇ ۋاپات بولغاندىن كېيىن كىشىلەر ئۇنى نەشر قىلغان). گەرچە ئۇنىڭ بۇ لايىھىسى مەغلۇپ بولغان بولسىمۇ، ئەمما نۇرغۇنلىغان مەسىلىلەرنى تەڭلىمە تۈزۈش ئۇسۇلى ئارقىلىق يەشكەن. دېكارت تەڭلىمىنى گېئومېتىرىيىدە قوللىنىپ، ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنى بەرپا قىلدى.

1637 ـ يىلى، دېكارت «ھەقىقەت ئىزدىنىشلەرگە تېخىمۇ ياخشى يېتەكچىلىك قىلىپ ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىدىغان مېتودولوگىيە» دېگەن ئەسىرىنى ئېلان قىلدى. بۇ پەلسەپۋى كلاسسىك ئەسەر بولۇپ، ئۈچ مۇندەرىجىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان، «گېئومېتىرىيە» ئۇلارنىڭ بىرى. «گېئومېتىرىيە» دېكارت يازغان بىردىنبىر ماتېماتىكا ئەسىرى. دېكارت «گېئومېتىرىيە» دە كوئوردىنات ئۇسۇلى ۋە تەڭلىمە ئارقىلىق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەش ئىدىيىسىنى ئوتتۇرىغا قويغان. شۇڭا، كېيىنكىلەر بۇ «گېئومېتىرىيە» ئەسىرىنىڭ ئېلان قىلىنىشىنى ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنىڭ بەرپا بولۇشىدىكى نامايەندە دەپ قارىغان.

دېكارت دەسلەپتە قوللانغان كوئوردىنات سىستېمىسىدا، ئىككى كوئوردىنات ئوقى ئارىسىدىكى ئارا بۇلۇڭنىڭ چوقۇم تىك بۇلۇڭ بولۇشىنى تەلەپ قىلمىغان، شۇنداقلا y ئوقىمۇ روشەن كۆرسىتىلمىگەن. «كوئوردىنات»، «كوئوردىنات سىستېمىسى»، «ئابسىسسا»، «ئوردىنات» دېگەن ئاتالغۇلارنىمۇ كېيىنكىلەر تەدرىجىي قوللانغان. گەرچە دېكارتنىڭ دەسلەپكى كوئوردىنات سىستېمىسى مۇكەممەل بولمىسىمۇ، ئەمما دېكارت ئۆز ۋاقتىدا باسقان بىرىنچى قەدەم ھەل قىلغۇچ ئەھمىيەتكە ئىگە، شۇڭا كىشىلەر كېيىن كەشىپ قىلىنغان تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى يەنىلا دېكارت تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى دەپ ئاتىغان.

دېكارت بىلەن تەڭ دەۋردە دېگۇدەك ياشىغان يەنە بىر فرانسىيە ماتېماتىكى فېرما (Fermat، 1601 ~ 1665 ـ يىللار) ئۆزىنىڭ تەتقىقاتىدا تەڭلىمە ئارقىلىق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەش ئىدىيىسىگە مۇستەقىل ئىگە بولغان. شۇڭا، فېرما بىلەن دېكارت بىرلىكتە ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنىڭ بەرپا قىلغۇچىلىرى دەپ قارىلىدۇ.

ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنىڭ بەرپا قىلىنىشى ماتېماتىكا تەرەققىيات تارىخىدا دەۋر بۆلگۈچ ئەھمىيەتكە ئىگە بولۇپ، ماتېماتىكا تەرەققىيات تارىخىدىكى بىر ئابىدە. ئۇ دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرالنىڭ بەرپا بولۇشىنى ئىلگىرى سۈردى، شۇنىڭدىن باشلاپ ماتېماتىكا ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار ماتېماتىكىسىدىن ئىبارەت يېڭى دەۋرگە كىردى. خۇددى ئېنگېلس «تەبىئىي دىئالېكتىكا» دېگەن كىتابىدا ئوتتۇرىغا قويغاندەك: «ماتېماتىكىدىكى بۇرۇلۇش نۇقتىسى دېكارتنىڭ ئۆزگەرگۈچى سانى، ئۆزگەرگۈچى سان بارلىققا كەلگەندىن كېيىن، ھەرىكەت ماتېماتىكىغا كىردى، ئۆزگەرگۈچى سان بارلىققا كەلگەندىن كېيىن، دىئالېكتىكا ماتېماتىكىغا كىردى، ئۆزگەرگۈچى سان بارلىققا كەلگەندىن كېيىن، دىففېرېنسىئال بىلەن ئىنتېگرال دەرھاللا زۆرۈر بولۇپ قالدى.»

ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنىڭ بەرپا بولۇشى گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىشنى يېڭى بىر خىل ئۇسۇل بىلەن تەمىنلىدى، كوئوردىنات سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ، گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇپ تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ. بۇ ئۇسۇل ئومۇمىيلىققا ئىگە، ئۇ ماتېماتىكىدىكى سان بىلەن شەكىل، ئالگېبرا بىلەن گېئومېتىرىيىدىن ئىبارەت ئىككى چوڭ پەن ئارىسىدىكى باغلىنىشنى تۇتاشتۇردى. شۇنىڭدىن باشلاپ ئالگېبرا بىلەن گېئومېتىرىيە بىر ـ بىرىدىن يېڭى ھاياتىي كۈچكە ئىگە بولۇپ، تېز تەرەققىي قىلدى.

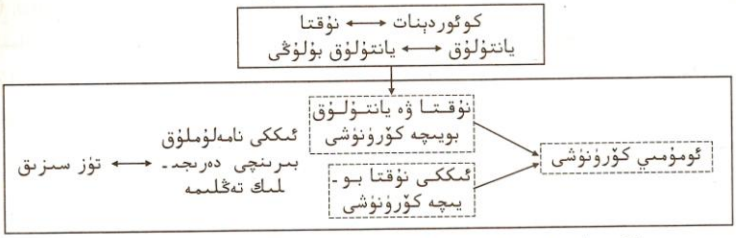
مۇلاھىزە: ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنىڭ مۇھىملىقى ئۇنىڭ ئۇسۇلىدا ئىكەنلىكىنى قانداق چۈشىنىسىز؟

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى

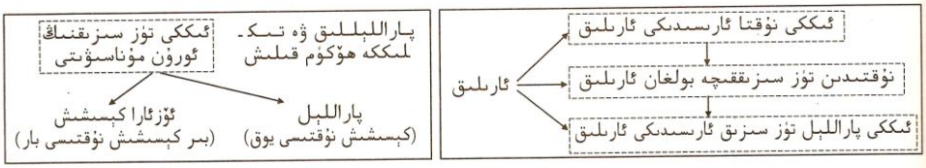
گېئومېترىيىلىك كۆرسەتمىلىكتىن ئالگېبرالىق ئىپادىلەشكە ئۆتۈش

(تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇش)



ئالگېبرالىق ئىپادىلەشتىن گېئومېترىيىلىك كۆرسەتمىلىككە ئۆتۈش

(گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيەت ۋە ئۆلچەشلەرنى تەڭلىمە ئارقىلىق تەتقىق قىلىش)



Ⅱ ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. بۇ بابتا ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن قانداق پايدىلىنىپ تۈز سىزىقنى تەتقىق قىلىش ئەسلىنىدۇ. ئالدى بىلەن تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى بەلگىلەيدىغان گېئومېترىيىلىك زۆرۈر ئامىللار ۋە ئۇلارنىڭ تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا ئىپادىلىنىشى ئۈستىدە ئىزدىنىش ئېلىپ بېرىلىپ، تۈز سىزىق تەڭلىمىسى تۇرغۇزۇلىدۇ؛ ئاندىن تەڭلىمە ئارقىلىق، ئالاقىدار گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەر ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىنىدۇ: ئۇ ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىش، ئىككى تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىش، نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقنى تېپىش قاتارلىقلارنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ. ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ تۈز سىزىققا دائىر مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىشنىڭ ئاساسىي پىكىر يولى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇپ، تەڭلىمە ئارقىلىق، گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىش ئىكەنلىكىنى ھېس قىلىش.

2. تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسىنى قانداق تۇرغۇزۇپ چىقتۇق؟ سىز بۇ تەڭلىمىنى تۇرغۇزۇشنىڭ ئادەتتىكى قەدەم باسقۇچلىرىنى خۇلاسىلەپ چىقالامسىز؟

3. تۈز سىزىقنىڭ نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بويىچە كۆرۈنۈشتىكى، يانتۇلۇق ۋە كەسمە بويىچە كۆرۈنۈشتىكى، ئىككى نۇقتا بويىچە كۆرۈنۈشتىكى، كەسمىلەر بويىچە كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىلىرىنى يېزىپ چىقىڭ ھەمدە بۇ تەڭلىمىلەردىكى كوئېففىتسېنتلارنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.

4. تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشكە بىرلەشتۈرۈپ، تۈرلەرگە ئايرىپ مۇزاكىرە قىلىش ئىدىيىسىنى ھېس قىلىش؛ مۇۋاپىق تۈرلەرگە ئايرىش ئۆلچىمىنى تاللاپ، مۇزاكىرىنى تەكرارلىماسلىق ياكى چۈشۈرۈپ قويماسلىق كېرەك.

5. ئانالىتىك گېئومېترىيە ئۇسۇلىدا كوئوردىنات سىستېمىسى ئارقىلىق، گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەر ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇلۇپ ھەل قىلىنىدۇ؛ ئەكسىچە بولغاندا، بەزى ئالگېبرالىق مەسىلىلەر مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىغا قويۇلغاندا، ئەگەر مەلۇم گېئومېترىيىلىك مەنىگە ئىگە بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنى گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇۋېلىپ ھەل قىلىشقا بولىدۇ. بۇ ئانالىتىك گېئومېترىيە ئۇسۇلىنى قوللىنىشنىڭ ئىككى تەرەپلىكلىكى. سىز بۇنىڭغا مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرەلەمسىز؟

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا

1. $O(0, 0)$ ، $A(8, 0)$ ، $B(0, 5)$ لەر تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئۈچ چوققىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئىككى دىئاگونالى ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2. $A(-2, 12)$ ، $B(1, 3)$ ، $C(4, -6)$ ئۈچ نۇقتىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

3. تۈز سىزىق $2x-5y-10=0$ بىلەن كوئوردىنات ئوقلىرىدىن قورشالغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزىنى تېپىڭ.

4. تۈز سىزىق $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ بىلەن $(5a-2)x+(a+4)y-7=0$ نىڭ ئۆزئارا تىك ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

5. ئەگەر تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى تەڭلىمە ئىپادىلىگەن تۈز سىزىقلار پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا a قانداق قىممەتنى ئېلىشى كېرەك؟

(1) $ax-5y=9,\qquad 2x-3y=15;$

(2) $x+2ay-1=0,\qquad (3a-1)x-ay-1=0;$

(3) $2x+3y=a,\qquad 4x+6y-3=0.$

6. ئەگەر تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى تەڭلىمە ئىپادىلىگەن تۈز سىزىقلار ئۆزئارا تىك بولسا، ئۇ ھالدا a قانداق قىممەتنى ئېلىشى كېرەك؟

(1) $4ax+y=1,\qquad (1-a)x+y=-1;$

(2) $2x+ay=2,\qquad ax+2y=1.$

7. ئىككى تۈز سىزىق $l_1: x+(1+m)y=2-m$ ۋە $l_2: 2mx+4y=-16$ بېرىلگەن، m قانداق قىممەتنى ئالغاندا، l_1 بىلەن l_2:

(1) ئۆزئارا كېسىشىدۇ؛ (2) پاراللېل بولىدۇ.

8. $A(4, 1)$ ، $B(1, 5)$ ، $C(-3, 2)$ ، $D(0, -2)$ لارنى چوققا قىلغان تۆت تەرەپلىكنىڭ شەكلىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

9. ئۆزئارا تىك بولغان ئىككى تۈز سىزىق $2x+y+2=0$ بىلەن $ax+4y-2=0$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

10. ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق $3x+4y-12=0$ بىلەن $ax+8y+11=0$ نىڭ ئارىسىدىكى ئارىلىقنى تېپىڭ.

11. تۈز سىزىق $x-y-2=0$ گە پاراللېل ھەمدە ئۇنىڭ بىلەن ئارىلىقى $2\sqrt{2}$ بولغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

12. پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ ئىككى تەرىپى ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى ئايرىم - ئايرىم

$$x+y-1=0,\quad 3x-y+4=0$$

ئىكەنلىكى ھەمدە ئۇنىڭ دىئاگوناللىرىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى $M(3, 3)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ باشقا ئىككى تەرىپى ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. تۈز سىزىق $3x-4y+5=0$ بىلەن x ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك بولغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى ( )

(A) $3x+4y-5=0$ (B) $3x+4y+5=0$

(C) $3x-4y+5=0$ (D) $3x-4y-5=0$

2. ئەگەر تۆت تەرەپلىكنىڭ بىر جۈپ قارىمۇقارشى تەرەپلىرىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسى يەنە بىر جۈپ قارىمۇقارشى تەرەپلىرىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ دىئاگوناللىرى قانداق مۇناسىۋەتكە ئىگە؟ نېمە ئۈچۈن؟

3. تۈز سىزىق $l: Ax+By+C=0$ $(A\neq 0,\ B\neq 0)$ ۋە $M_0(x_0, y_0)$ نۇقتا بېرىلگەن:

(1) M_0 نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە l تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

(2) M_0 نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە l تۈز سىزىققا تىك بولغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}.$$

بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

4. ئىككى پاراللېل تۈز سىزىق $3x+2y-6=0$ بىلەن $6x+4y-3=0$ بېرىلگەن، ئۇلار بىلەن تەڭ ئارىلىقتا بولغان پاراللېل سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

5. ئەگەر فۇنكسىيە $y=f(x)$ نىڭ $x=a$ ۋە $x=b$ ئارىسىدىكى بىر بۆلەك گرافىكىنى تەقرىبىي ھالدا تۈز سىزىق دەپ قارىساق ھەمدە $a\leqslant c\leqslant b$ بولسا،

$$f(c)\approx f(a)+\frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$$

بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

6. بىر تەكشىلىكتە، ماشىنا ئادەم $C(5,-3)$ نۇقتا بىلەن ئارىلىقى 9 بولغان جايغا كېلىپ C نۇقتا ئەتراپىدا سائەت ئىستىرېلكىسىنىڭ يۆنىلىشى بويىچە ماڭىدى، مېڭىش جەريانىدا C نۇقتا بىلەن بولغان ئارىلىقى ئۆزگەرمەيدۇ. ئۇنىڭ مېڭىش جەريانىدا $A(-10,0)$ بىلەن $B(0,12)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىققىچە بولغان ئەڭ يېقىن ئارىلىقى ۋە ئەڭ يىراق ئارىلىقى ئايرىم - ئايرىم قانچە؟

7. $a, b, c, d\in \mathbf{R}$ دەپ پەرەز قىلساق، خالىغان $p, q\in \mathbf{R}$ غا نىسبەتەن،

$$\sqrt{(a-p)^2+(b-q)^2}+\sqrt{(c-p)^2+(d-q)^2}\geqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

8. $P(3,0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن بىر l تۈز سىزىقنىڭ ئىككى تۈز سىزىق $l_1: 2x-y-2=0$ بىلەن $l_2: x+y+3=0$ نىڭ ئارىسىدىكى كېسىكى دەل P نۇقتا تەرىپىدىن تەڭ ئىككىگە بۆلۈنىدىغانلىقى بېرىلگەن، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

9. ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىلىرىنى تۇتاشتۇرغۇچى كېسىنىڭ ئۈچىنچى تەرەپكە پاراللېل بولىدىغانلىقى ھەمدە ئۇزۇنلۇقى ئۈچىنچى تەرەپنىڭ يېرىمىغا تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

10. كۋادراتنىڭ مەركىزى $M(-1,0)$ نۇقتىدا، بىر تەرىپى ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $x+3y-5=0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، كۋادراتنىڭ باشقا ئۈچ تەرىپى ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4 ـ باب

چەمبەر ۋە تەڭلىمە

4ـ1 چەمبەر تەڭلىمىسى

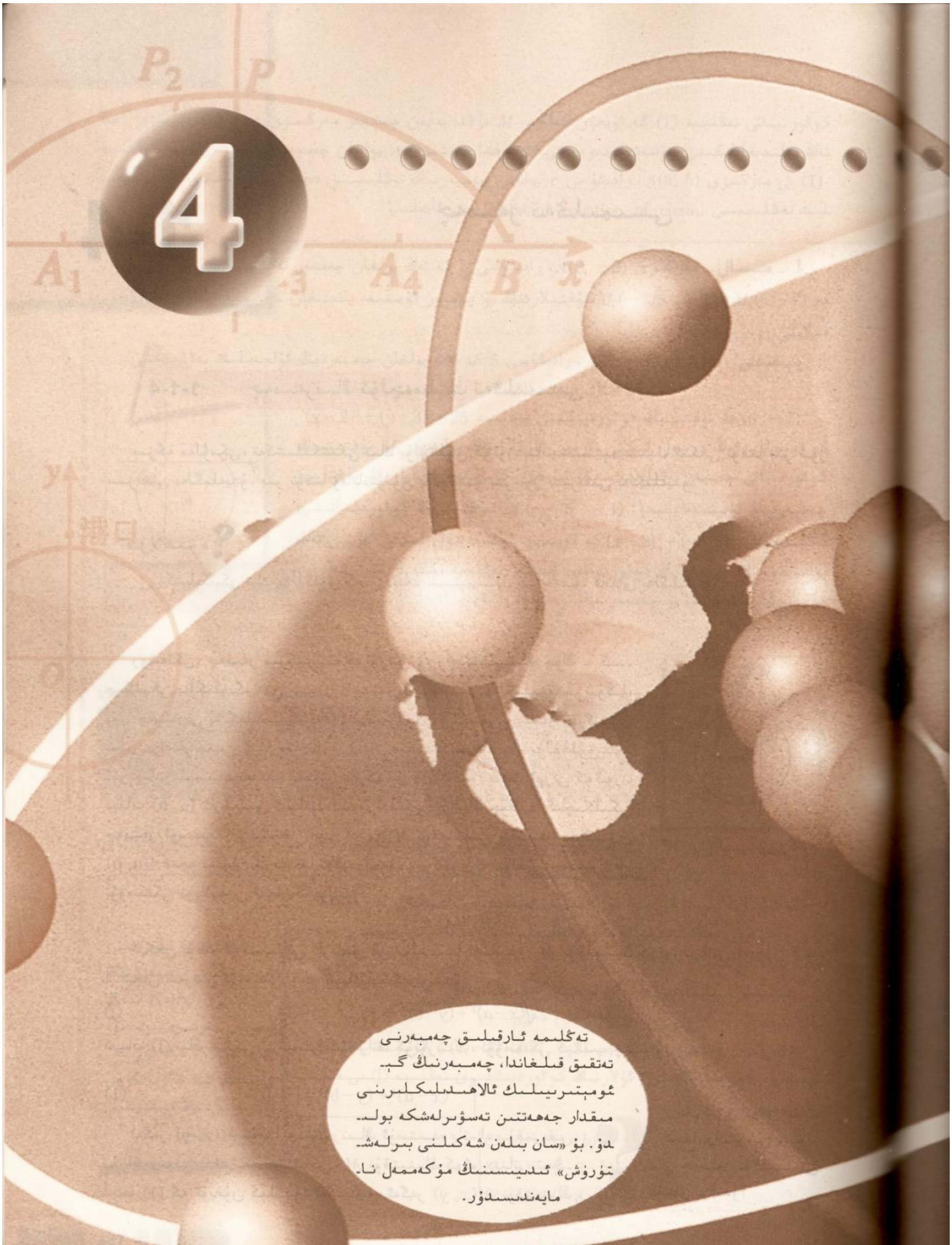
4ـ2 تۈز سىزىق، چەمبەرلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

4ـ3 بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى

ئالدىنقى بابتا، تۈز سىزىق بىلەن تەڭلىمىنى ئۆگىنىپ ئوتتۇق. تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، تۈز سىزىقنى تەڭلىمە ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقىنى بىلدۇق، تەڭلىمە ئارقىلىق، تۈز سىزىقلار ئارىسىدىكى ئورۇن مۇناسىۋىتى، تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى قاتارلىق مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلغىلى بولىدۇ.

بۇ بابتا ئالدىنقى بابتىكى بىلىملەر ئاساسىدا، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا چەمبەر تەڭلىمىسى تۇرغۇزۇلىدۇ. چەمبەر تەڭلىمىسى ئارقىلىق، تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر، چەمبەر بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى تەتقىق قىلىنىدۇ. ئۇنىڭدىن باشقا، بىز يەنە بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىغا دائىر بىلىملەرنى ئۆگىنىمىز، ئۇ ئانالىتىك ئۇسۇل ئارقىلىق بوشلۇقتىكى گېئومېتىرىيىلىك ئوبيېكتلارنى تەتقىق قىلىشنىڭ ئاساسى.

تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، گېئومېتىرىيىلىك ئوبيېكتلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇش ھەمدە تەڭلىمە ئارقىلىق گېئومېتىرىيىلىك ئوبيېكتلارنى تەتقىق قىلىش، گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىشتىكى مۇھىم ئۇسۇل. كوئوردىنات سىستېمىسى ئارقىلىق، نۇقتا بىلەن كوئوردىناتنى، ئەگرى سىزىق بىلەن تەڭلىمىنى ئۆزئارا باغلاپ، بوشلۇقتىكى شەكىل بىلەن سانلىق مۇناسىۋەتنى بىرلەشتۈرۈشنى ئەمەلگە ئاشۇرغىلى بولىدۇ.



تەڭلىمە ئارقىلىق چەمبەرنى تەتقىق قىلغاندا، چەمبەرنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكلىرىنى مىقدار جەھەتتىن تەسۋىرلەشكە بولىدۇ. بۇ «سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈش» ئىدىيىسىنىڭ مۇكەممەل نامايەندىسىدۇر.

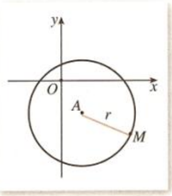
1-4 چەمبەر تەڭلىمىسى

1-1-4 چەمبەرنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى

بىزگە مەلۇمكى، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ئىككى نۇقتا بىر تۈز سىزىقنى بەلگىلەيدۇ، بىر نۇقتا ۋە يانتۇلۇق بۇلۇڭىمۇ بىر تۈز سىزىقنى بەلگىلەيدۇ.

مۇلاھىزە؟

تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، بىر چەمبەر قانداق بەلگىلىنىدۇ؟



1.1.4 ـ رەسىم

روشەنكى، چەمبەر مەركىزىنىڭ ئورنى ۋە رادىئۇسىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى بەلگىلەنگەندىن كېيىن، چەمبەر بىردىنبىر بەلگىلىنىدۇ. شۇڭا، بىر چەمبەرنى بەلگىلەشنىڭ ئەڭ ئاساسىي زۆرۈر ئامىلى چەمبەر مەركىزى بىلەن رادىئۇستىن ئىبارەت. 1.1.4 ـ رەسىمدىكىدەك، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، چەمبەر مەركىزى A (نۇقتا) نىڭ ئورنى كوئوردېنات (a, b) ئارقىلىق ئىپادىلەنسە، رادىئۇس r نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر $M(x, y)$ نۇقتىدىن چەمبەر مەركىزى $A(a, b)$غىچە بولغان ئارىلىققا تەڭ بولىدۇ، مەركىزى A بولغان چەمبەر دەل تۆۋەندىكى توپلامدىن ئىبارەت بولىدۇ:

$$P=\{M \mid |MA|=r\}.$$

ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسىغا ئاساسەن، M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى ئۇيغۇن كېلىدىغان شەرتنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r, \qquad ①$$

ئىپادە ① نىڭ ئىككى تەرىپىنى كۋادراتقا كۆتۈرسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.} \qquad (1)$$

مەركىزى كوئوردېنات بېشىدا، رادىئۇسى r بولغان چەمبەر تەڭلىمىسى قانداق بولىدۇ؟

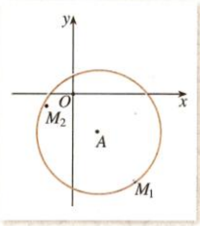
ئەگەر $M(x, y)$ نۇقتا چەمبەرنىڭ ئۈستىدە ياتسا، يۇقىرىقى مۇزاكىرىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى تەڭلىمە (1) گە ئۇيغۇن كېلىدۇ؛ ئەكسىچە، ئەگەر $M(x, y)$ نۇقتىنىڭ

كوئوردىناتى تەڭلىمە (1) گە ئۇيغۇن كەلسە، M نۇقتا بىلەن چەمبەر مەركىزى A نىڭ ئارىلىقى r غا تەڭ بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ، يەنى M نۇقتا مەركىزى A بولغان چەمبەر ئۈستىدە ياتىدۇ. تەڭلىمە (1) نى مەركىزى $A(a, b)$، رادىئۇسى r بولغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى دەيمىز، ئۇ چەمبەرنىڭ **ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى** (standard equation of circle) دەپ ئاتىلىدۇ.

1 ـ مىسال. مەركىزى $A(2, -3)$، رادىئۇسى 5 كە تەڭ بولغان چەمبەر تەڭلىمىسىنى يازايلى ھەمدە $M_1(5, -7)$، $M_2(-\sqrt{5}, -1)$ نۇقتىلارنىڭ بۇ چەمبەر ئۈستىدە ياتىدىغان ـ ياتمايدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى.

يېشىش: مەركىزى $A(2, -3)$، رادىئۇسى 5 كە تەڭ بولغان چەمبەرنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$



2.1.4 ـ رەسىم

$M_1(5, -7)$ نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تەڭلىمە $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ كە قويساق، ئوڭ ـ سول ئىككى تەرىپى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ، M_1 نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى چەمبەر تەڭلىمىسىگە ئۇيغۇن كېلىدۇ. شۇڭا، M_1 نۇقتا بۇ چەمبەرنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ؛ $M_2(-\sqrt{5}, -1)$ نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تەڭلىمە $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ كە قويساق، ئوڭ ـ سول ئىككى تەرىپى تەڭ بولمايدۇ، M_2 نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى چەمبەر تەڭلىمىسىگە ئۇيغۇن كەلمەيدۇ، شۇڭا، M_2 نۇقتا بۇ چەمبەرنىڭ ئۈستىدە ياتمايدۇ (2.1.4 ـ رەسىم).

ئىزدىنىش

$M_0(x_0, y_0)$ نۇقتا چەمبەر $x^2+y^2=r^2$ نىڭ ئىچىدە يېتىشىنىڭ شەرتى نېمە؟
چەمبەر $x^2+y^2=r^2$ نىڭ سىرتىدا يېتىشىنىچۇ؟

2 ـ مىسال. $\triangle ABC$ نىڭ ئۈچ چوققىسىنىڭ كوئوردىناتلىرى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $A(5, 1)$، $B(7, -3)$، $C(2, -8)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ئۇنىڭغا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

تەھلىل: ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتمىغان ئۈچ نۇقتا بىر چەمبەرنى بەلگىلەيدۇ، ئۈچبۇلۇڭغا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەر پەقەت بىرلا بولىدۇ.

> $\triangle ABC$ غا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەرنىڭ مەركىزى $\triangle ABC$ نىڭ سىرتقى مەركىزى بولىدۇ، يەنى $\triangle ABC$ نىڭ ئۈچ تەرىپىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچى سىزىقلىرىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى بولىدۇ.

يېشىش: تاپماقچى بولغان چەمبەر تەڭلىمىسىنى

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad ①$$

دەپ پەرەز قىلساق، $A(5, 1)$، $B(7, -3)$، $C(2, -8)$ لار چەمبەرنىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، ئۇلارنىڭ كوئوردىناتلىرى تەڭلىمە ① نى قانائەتلەندۈرىدۇ. شۇڭا:

$$\begin{cases}(5-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\(7-a)^2+(-3-b)^2=r^2,\\(2-a)^2+(-8-b)^2=r^2.\end{cases}$$

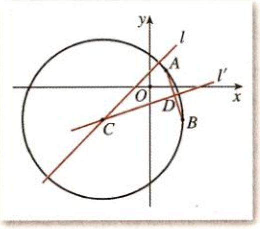
بۇ تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنى يەشسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\begin{cases} a=2,\\ b=-3,\\ r^2=25.\end{cases}$$

شۇڭا، $\triangle ABC$ غا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

3 ـ مىسال. مەركىزى C بولغان چەمبەر $A(1,1)$ ۋە $B(2,-2)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدىغانلىقى ھەمدە چەمبەر مەركىزى C تۈز سىزىق $l: x-y+1=0$ نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى بېرىلگەن، مەركىزى C بولغان چەمبەرنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تاپايلى.



3.1.4 ـ رەسىم

تەھلىل: 3.1.4 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر چەمبەرنى بەلگىلەشتە پەقەت چەمبەر مەركىزىنىڭ ئورنى بىلەن رادىئۇسىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى بەلگىلەشلا كۇپايە. مەركىزى C بولغان چەمبەر $A(1,1)$ ۋە $B(2,-2)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ، چەمبەر مەركىزى C دىن A، B ئىككى نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقلار ئۆزئارا تەڭ بولغانلىقتىن، چەمبەر مەركىزى C كېسىك AB نىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى l' نىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ. يەنە چەمبەر مەركىزى C تۈز سىزىق l نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، چەمبەر مەركىزى C تۈز سىزىق l بىلەن تۈز سىزىق l' نىڭ كېسىشىش نۇقتىسى بولىدۇ، رادىئۇسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $|CA|$ ياكى $|CB|$ غا تەڭ.

يېشىش: چۈنكى $A(1,1)$، $B(2,-2)$، شۇڭا كېسىكنىڭ AB ئوتتۇرا نۇقتىسى D نىڭ كوئوردىناتى $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$، AB تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى:

$$k_{AB}=\frac{-2-1}{2-1}=-3,$$

شۇنىڭ بىلەن AB كېسىكنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى l' نىڭ تەڭلىمىسى:

$$y+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right),$$

يەنى

$$x-3y-3=0.$$

چەمبەر مەركىزى C نىڭ كوئوردىناتى تەڭلىمىلەر سىستېمىسى:

$$\begin{cases} x-3y-3=0,\\ x-y+1=0\end{cases}$$

نىڭ يېشىمى بولىدۇ.

بۇ تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنى يەشسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\begin{cases} x=-3,\\ y=-2.\end{cases}$$

شۇڭا، چەمبەر مەركىزى C نىڭ كوئوردىناتى $(-3,-2)$ بولىدۇ.

2 ـ مىسال بىلەن 3 ـ مىسالنى سېلىشتۇرۇپ، خالىغان $\triangle ABC$ غا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەر تەڭلىمىسىنى تېپىشنىڭ ئىككى خىل ئۇسۇلىنى يىغىنچاقلاپ چىقالامسىز؟

مەركىزى C بولغان چەمبەرنىڭ رادىئۇسى:

$$r = |AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (1+2)^2} = 5.$$

شۇڭا، مەركىزى C بولغان چەمبەرنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى:

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

مەشىق

1. تۆۋەندىكى چەمبەرلەرنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى يېزىڭ:

(1) چەمبەر مەركىزى $C(-3, 4)$، رادىئۇسى $\sqrt{5}$؛

(2) چەمبەر مەركىزى $C(8, -3)$ ھەمدە $M(5, 1)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ.

2. چەمبەر تەڭلىمىسى $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندىكى ھەرقايسى نۇقتىلارنىڭ چەمبەر ئۈستىدە، چەمبەر سىرتىدا ياكى چەمبەر ئىچىدە ياتىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

(1) $M_1(4.30, -5.72)$;　　(2) $M_2(5.70, 1.08)$;　　(3) $M_3(3, -6)$.

3. $P_1(4, 9)$، $P_2(6, 3)$ ئىككى نۇقتا بېرىلگەن، P_1P_2 كېسىكنى دىئامېتىر قىلغان چەمبەر تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە $M(6, 9)$، $N(3, 3)$، $Q(5, 3)$ نۇقتىلارنىڭ چەمبەر ئۈستىدە، چەمبەر ئىچىدە ياكى چەمبەر سىرتىدا ياتىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىشقا بولىدۇ).

4. $\triangle AOB$ نىڭ چوققىلىرىنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $A(4, 0)$، $B(0, 3)$، $O(0, 0)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\triangle AOB$ غا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2-1-4 چەمبەرنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى

مۇلاھىزە ?

تەڭلىمە $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قانداق شەكىلنى ئىپادىلەيدۇ؟ تەڭلىمە $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ قانداق شەكىلنى ئىپادىلەيدۇ؟

تەڭلىمە $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ نى كۋادراتقا كەلتۈرسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4,$$

بۇ تەڭلىمە $(1, -2)$ نى مەركەز، 2نى رادىئۇس قىلغان چەمبەرنى ئىپادىلەيدۇ.

ئوخشاشلا، تەڭلىمە $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ نى كۋادراتقا كەلتۈرسەك، $(x-1)^2 + (y-2)^2 = -1$ كېلىپ چىقىدۇ، بۇ تەڭلىمىنى قانائەتلەندۈرىدىغان كوئوردىناتى (x, y) بولغان نۇقتا مەۋجۇت بولمىغانلىقتىن، بۇ تەڭلىمە ھېچقانداق شەكىلنى ئىپادىلىمەيدۇ.

ئىزدىنىش

تەڭلىمە $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ قانداق شەرت ئاستىدا چەمبەرنى ئىپادىلەيدۇ؟

تەڭلىمە

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (2)$$

نى مۇھاكىمە قىلايلى.

تەڭلىمە (2) نىڭ سول تەرىپىنى كۋادراتقا كەلتۈرسەك ھەمدە ئازاد ئەزانى ئوڭ تەرەپكە يۆتكىسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \qquad ①$$

(Ⅰ) $D^2+E^2-4F>0$ بولغاندا، تەڭلىمە ① بىلەن چەمبەرنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى سېلىشتۇرساق، تەڭلىمە (2) نىڭ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ نى مەركەز، $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ نى رادىئۇس قىلغان چەمبەرنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى كۆرۈۋالغىلى بولىدۇ؛

(Ⅱ) $D^2+E^2-4F=0$ بولغاندا، تەڭلىمە (2) پەقەت ھەقىقىي (سانلىق) يېشىم $x=-\frac{D}{2}$، $y=-\frac{E}{2}$ گە ئىگە بولىدۇ، ئۇ بىر نۇقتا $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ نى ئىپادىلەيدۇ.

(Ⅲ) $D^2+E^2-4F<0$ بولغاندا، تەڭلىمە (2) ھەقىقىي يېشىمگە ئىگە بولمايدۇ، شۇڭا ئۇ ھېچقانداق شەكىلنى ئىپادىلىمەيدۇ.

شۇڭا، $D^2+E^2-4F>0$ بولغاندا، تەڭلىمە (2) بىر چەمبەرنى ئىپادىلەيدۇ. تەڭلىمە (2) **چەمبەرنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى** (general equation of circle) دەپ ئاتىلىدۇ.

مۇلاھىزە ?

چەمبەرنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى بىلەن چەمبەرنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىسى ئايرىم - ئايرىم ھالدا قانداق ئالاھىدىلىكلەرگە ئىگە؟

4 - مىسال. $O(0, 0)$، $M_1(1, 1)$، $M_2(4, 2)$ ئۈچ نۇقتىدىن ئۆتكەن چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى ھەمدە بۇ چەمبەرنىڭ رادىئۇسى ۋە مەركىزىنىڭ كوئوردىناتىنى تاپايلى.

تەھلىل: چۈنكى $O(0, 0)$، $M_1(1, 1)$، $M_2(4, 2)$ لەر بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ئەمەس، شۇڭا O، M_1، M_2 ئۈچ نۇقتىدىن ئۆتىدىغان پەقەت بىرلا چەمبەر بار.

يېشىش: تاپماقچى بولغان چەمبەر تەڭلىمىسىنى

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \qquad ①$$

دەپ پەرەز قىلساق، O، M_1، M_2 ئۈچ نۇقتا چەمبەرنىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، ئۇلارنىڭ كوئوردىناتلىرى تەڭلىمە ① نىڭ يېشىمى بولىدۇ. ئۇلارنىڭ كوئوردىناتلىرىنى تەرتىپ بويىچە تەڭلىمە ① گە قويساق، D، E، F قا دائىر ئۈچ نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەر سىستېمىسى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\begin{cases} F=0, \\ D+E+F+2=0, \\ 4D+2E+F+20=0. \end{cases}$$

بۇ تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنى يەشسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$D=-8, \quad E=6, \quad F=0.$$

شۇڭا، تاپماقچى بولغان چەمبەر تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

2 ـ مىسالدىكى ئۇسۇلغا سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق، نېمىنى ھېس قىلدىڭىز؟

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

يۇقىرىقى مۇزاكىرىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، تاپماقچى بولغان چەمبەر مەركىزىنىڭ كوئوردېناتى $(4,\ -3)$، رادىئۇسى $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=5$ بولىدۇ.

چەمبەر تەڭلىمىسىنى تېپىشتا دائىم «كوئېففىتسېنتنى ئېنىقلاش ئۇسۇلى» قوللىنىلىدۇ. «كوئېففىتسېنتنى ئېنىقلاش ئۇسۇلى» نى قوللىنىپ چەمبەر تەڭلىمىسىنى تېپىشنىڭ قەدەم باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىدەك:

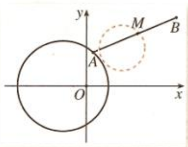
① مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، ئۆلچەملىك تەڭلىمە ياكى ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمە تاللىنىدۇ؛

② شەرتكە ئاساسەن a، b، r ياكى D، E، F لارغا دائىر تەڭلىمىلەر سىستېمىسى تۈزۈپ چىقىلىدۇ؛

③ a، b، r ياكى D، E، F لار تېپىلىپ، ئۆلچەملىك تەڭلىمە ياكى ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى تەڭلىمىگە قويۇلىدۇ.

M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسى M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى (x, y) قانائەتلەندۈرىدىغان مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى كۆرسىتىدۇ.

5 ـ مىسال. AB كېسىكنىڭ ئۇچ نۇقتىسى B نىڭ كوئوردېناتى $(4, 3)$ ئىكەنلىكى، ئۇچ نۇقتىسى A چەمبەر $(x+1)^2+y^2=4$ نىڭ ئۈستىدە ھەرىكەت قىلىدىغانلىقى بېرىلگەن، AB كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M نىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تاپايلى.



4.1.4 ـ رەسىم

تەھلىل: 4.1.4 ـ رەسىمدىكىدەك، A نۇقتىنىڭ ھەرىكىتى M نۇقتىنىڭ ھەرىكىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىدۇ، A نۇقتا بېرىلگەن چەمبەرنىڭ ئۈستىدە ھەرىكەت قىلىدىغانلىقتىن، A نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى تەڭلىمە $(x+1)^2+y^2=4$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ. M نۇقتا بىلەن A نۇقتىنىڭ كوئوردېناتلىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى تۇرغۇزساق، M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى قانائەتلەندۈرىدىغان شەرتنى تۇرغۇزغىلى بولىدۇ، شۇ ئارقىلىق M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تاپقىلى بولىدۇ.

يېشىش: M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x, y)، A نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x_0, y_0) دەپ پەرەز قىلساق، B نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(4, 3)$ ھەمدە M نۇقتا AB كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولغانلىقتىن،

$$x=\frac{x_0+4}{2},\quad y=\frac{y_0+3}{2},$$

بولىدۇ، شۇڭا

$$x_0=2x-4,\quad y_0=2y-3. \qquad ①$$

A نۇقتا چەمبەر $(x+1)^2+y^2=4$ نىڭ ئۈستىدە ھەرىكەت قىلىدىغانلىقتىن، A نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى تۆۋەندىكى تەڭلىمىنى قانائەتلەندۈرىدۇ:

$$(x+1)^2+y^2=4,$$

يەنى

$$(x_0+1)^2+y_0^2=4. \qquad ②$$

① نى ② گە قويساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$(2x-4+1)^2+(2y-3)^2=4,$$

بۇنى رەتلىسەك، تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1.$$

شۇڭا، M نۇقتىنىڭ تراييېكتورىيىسى $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ نى مەركەز قىلغان، رادىئۇسى 1 بولغان چەمبەر بولىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى تەڭلىمىلەر ئىپادىلىگەن چەمبەر مەركىزىنىڭ كوئوردىناتى بىلەن رادىئۇسىنى تېپىڭ:

(1) $x^2+y^2-6x=0$;　　(2) $x^2+y^2+2by=0$;

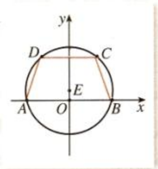
(3) $x^2+y^2-2ax-2\sqrt{3}\,ay+3a^2=0$.

2. تۆۋەندىكى تەڭلىمىلەرنىڭ ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا قانداق شەكىلنى ئىپادىلەيدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $x^2+y^2=0$;　　(2) $x^2+y^2-2x+4y-6=0$;

(3) $x^2+y^2+2ax-b^2=0$.

3. رەسىمدىكىدەك، تەڭ يانلىق تراپېتسىيە $ABCD$ نىڭ ئاساسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا 6 ۋە 4، ئېگىزلىكى 3 ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ تەڭ يانلىق تراپېتسىيىگە سىرتتىن ئېگىشكەن چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە بۇ چەمبەر مەركىزىنىڭ كوئوردىناتى بىلەن رادىئۇسىنى تېپىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

1.4 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى چەمبەرلەرنىڭ مەركىزىنىڭ كوئوردىناتى بىلەن رادىئۇسىنى تېپىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ شەكلىنى سىزىڭ:

(1) $x^2+y^2-2x-5=0$;　　(2) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$;

(3) $x^2+y^2+2ax=0$;　　(4) $x^2+y^2-2by-2b^2=0$.

2. تۆۋەندىكى چەمبەرلەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە شەكلىنى سىزىڭ:

(1) مەركىزى $C(8, -3)$ ھەمدە $A(5, 1)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(2) $A(-1, 5)$، $B(5, 5)$، $C(6, -2)$ ئۈچ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ.

3. C چەمبەرنىڭ مەركىزى تۈز سىزىق $l: x-2y-1=0$ نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى ھەمدە كوئوردىنات بېشى بىلەن $A(2, 1)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن، C چەمبەرنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4. C چەمبەرنىڭ مەركىزى x ئوق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى ھەمدە $A(-1, 1)$، $B(1, 3)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن، C چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

5. چەمبەرنىڭ بىر دىئامېتىرىنىڭ ئىككى ئۇچى ئايرىم ـ ئايرىم $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ ئىكەنلىكى

بېرىلگەن، بۇ چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

6. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا $A(0, 1)$، $B(2, 1)$، $C(3, 4)$، $D(-1, 2)$ تۆت نۇقتا بار، بۇ تۆت نۇقتا ئوخشاش بىر چەمبەر ئۈستىدە ياتامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

B گۇرۇپپا

1. تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭنىڭ چوققىسى A نىڭ كوئوردېناتى $(4, 2)$، ئاساسىنىڭ بىر ئۇچى B نىڭ كوئوردېناتى $(3, 5)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، يەنە بىر ئۇچى C نىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە ئۇنىڭ قانداق شەكىل ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈڭ.

2. ئۇزۇنلۇقى $2a$ بولغان AB كېسىنىڭ ئىككى ئۇچى A، B ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا x ئوق ۋە y ئوق ئۈستىدە سىيرىلىپ ھەرىكەت قىلىدىغانلىقى بېرىلگەن، AB كېسىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

3. M نۇقتا بىلەن ئىككى مۇقىم نۇقتا $O(0, 0)$، $A(3, 0)$ نىڭ ئارىلىقلىرىنىڭ نىسبىتى $\frac{1}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

كوئوردېنات ئۇسۇلى ۋە ماشىنا بىلەن ئىسپاتلاش

دېكارت كوئوردېنات سىستېمىسىنى بەرپا قىلىپ، گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى يېشىش ياكى ئىسپاتلاشنى كوئوردېنات ئارقىلىق ئالگېبرالىق تەڭلىمىلەرنى يېشىشكە ئايلاندۇردى. ئالگېبرالىق تەڭلىمىلەرنى يېشىش بىر ھېسابلاش مەسىلىسى بولۇپ، كوئوردېنات بولغانلىقتىن، گېئومېترىيىلىك تېئورېمىلارنى ئىسپاتلاشتا كومپيۇتېردىن پايدىلىنىش ئىمكانىيىتى يارىتىلدى.

ماشىنىنى خۇلاسە چىقىرىش قورالى قىلىش ئىدىيىسىنى ئېنىق ئوتتۇرىغا قويغان كىشى 17 ـ ئەسىردە ياشىغان گېرمانىيە ماتېماتىكى لايبنىس (Leibniz، 1646 ~ 1716 ـ يىللار دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرالنى بەرپا قىلغۇچىلارنىڭ بىرى) بولۇپ، ئۇ دېكارت ئىدىيىسىنىڭ تەسىرىدە، دېكارت بەرپا قىلغان ئانالىتىك گېئومېترىيىنىڭ مەقسىتى گېئومېترىيىلىك خۇلاسە چىقىرىشنى ھېسابلاشقا ئايلاندۇرۇشتىن ئىبارەت دەپ قارىغان. ئەپسۇسلىنارلىقى، شۇ دەۋر شەرت ـ شارائىتىنىڭ چەكلىمىسى تۈپەيلىدىن، ھېسابلاش پەقەت قول مەشغۇلاتى ئارقىلىقلا ئېلىپ بېرىلاتتى (قول بىلەن ئايلاندۇرۇلىدىغان ھېسابلاش ماشىنىسى)، بۇنىڭدا كۆپ مىقداردىكى مۇرەككەپ ھېسابلاشلارنى ئېلىپ بېرىشقا ئامالسىز بولغانلىقتىن، گېئومېترىيىلىك تېئورېمىلارنى ماشىنا بىلەن ئىسپاتلاش ئىدىيىسىنى ئەمەلگە ئاشۇرۇش مۇمكىن ئەمەس ئىدى.

20 ـ ئەسىردىن كېيىن، كومپيۇتېر تېزدىن تەرەققىي قىلدى. كومپيۇتېرنىڭ كەشىپ قىلىنىشى بىلەن بىر قىسىم ماتېماتىكلار گېئومېترىيىلىك تېئورېمىلارنى ئىسپاتلاشنى مېخانىكىلاشتۇرۇشنىڭ مۇمكىنچىلىكى ئۈستىدە يەنە ئىزدىنىشكە باشلىدى. 1950 ـ يىلى، پولشا ماتېماتىكى تاسكىي كىشىلەرنىڭ دىققىتىنى قوزغايدىغان بىر يەكۈنگە ئىگە بولدى: بارلىق

باشلانغۇچ گېئومېترىيىسىگە تەۋە بولغان هۆكۈملۈكلەرنىڭ ھەممىسىگە مېخانىكىلىق ئۇسۇل بويىچە هۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ. ئۇنىڭ هۆكۈم قىلىش ئۇسۇلى بەك مۇرەككەپ بولغاچقا، ئەمەلىيەت جەريانىدا چوڭ تەرەققىياتلارغا ئېرىشەلمىدى. 1959 ـ يىلى، ئامېرىكا تەۋەلىكىدىكى جۇڭگولۇق ماتېماتىك ۋاڭ خاۋ (1921 — 1999) بۇ جەھەتتە كىشىنى ئىلھاملاندۇرىدىغان خىزمەتلەرنى ئىشلىدى، ئۇ كومپيۇتېردا پەقەت 9 مىنۇت سەرپ قىلىپلا «ماتېماتىكا پرىنسىپى» (روسوۋ ۋە ۋايتخاي يازغان) دىكى 350 تىن كۆپرەك هۆكۈملۈكنى ئىسپاتلاپ چىقتى ھەمدە بىرىنچى بولۇپ «ماتېماتىكىنىڭ مېخانىكىلىشىشى» دېگەن شوئارنى ئېنىق ئوتتۇرىغا قويدى.

ۋۇۋېنجۈن (1919 —)

20 ـ ئەسىرنىڭ 70 ـ يىللىرىدىن كېيىن، مەملىكىتىمىزدىكى ئاتاقلىق ماتېماتىك ۋۇ ۋېنجۈن[1] گېئومېترىيىلىك تېئورېمىلارنى ماشىنا بىلەن ئىسپاتلاشتا مۇھىم تۆھپە ياراتتى ھەمدە «ۋۇ ئۇسۇلى» نى بەرپا قىلدى.

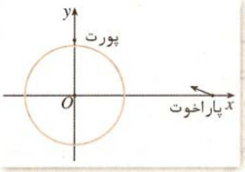
ۋۇ ۋېنجۈننىڭ ماشىنا بىلەن ئىسپاتلاش ئىدىيىسى، ئاساسلىقى دېكارتنىڭ كوئوردېنات ئۇسۇلى ۋە جۇڭگونىڭ قەدىمكى تەڭلىمىلەرنى يېشىشتىكى ھېسابلاش ئۇسۇلىدىن كەلگەن. ئۇ، ئېۋكلىد گېئومېترىيە سىستېمىسىنىڭ ئالاھىدىلىكى پەقەتلا بوشلۇقتىكى شەكىللەر ئارىسىدىكى خۇلاسىدىن ياكى شەكىللەر ئارا ۋە ياكى سانلىق مۇناسىۋەتلەرنى بوشلۇقتىكى شەكىللەرگە يىغىنچاقلاش ياكى سانلىق مۇناسىۋەتلەرنى بىراقلا چىقىرىۋېتىشتىن ئىبارەت دەپ قارايدۇ. يەنە بىر سىستېما دەل ئۇنىڭ ئەكسىچە بولۇپ، بوشلۇقتىكى شەكىلنى سانلىق مۇناسىۋەتكە ئايلاندۇرۇپ بىر تەرەپ قىلىدۇ. بۇ خىل مۇھاكىمە ئۇسۇلى دەل جۇڭگونىڭ ئەنئەنىۋى ئۇسۇلى بولۇپ، 11 ـ ئەسىردىلا بارلىققا كەلگەن، ئۆز ۋاقتىدا تيەنيۈەن، دىيۈەن قاتارلىق ئۇقۇملار كىرگۈزۈلگەن، ئۇلارنى هازىرقى بەلگە بويىچە ئىپادىلىسەك x، y قاتارلىقلارغا ماس كېلىدۇ. تيەنيۈەن، دىيۈەن ئارقىلىق مەلۇم بىر گېئومېترىيىلىك پاكىتلارنى ئىپادىلىسەك، ئۇ هالدا گېئومېترىيىلىك ئوبيېكتلار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى تيەنيۈەن، دىيۈەن ئارىسىدىكى بىر خىل تەڭلىمە(يەنى، x، y ئارىسىدىكى بىر خىل تەڭلىمە) ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ، يەنى بۇ 17 ـ ئەسىردىكى ئانالىتىك گېئومېترىيىدىكى كوئوردېنات ئۇسۇلىدىن ئىبارەت.

ۋۇ ۋېنجۈن، ئېۋكلىد گېئومېترىيە سىستېمىسى ماشىنىلاشقان ئەمەس، ھالبۇكى بوشلۇقتىكى شەكىللەرنى مىقدارلاشتۇرۇش بولسا ماشىنىلاشقان دەپ قارايدۇ. ۋۇ ۋېنجۈن مۇنداق دەيدۇ: «گېئومېترىيىگە ۋە بوشلۇقتىكى شەكىلنى تەتقىق قىلىشقا نىسبەتەن، سىز ھەقىقەتەن نەتىجە قازانماقچى بولسىڭىز، سانلىق مۇناسىۋەتتىن باشقا ياخشى چارە يوق.» «مەن گېئومېترىيىلىك تېئورېمىلارنى ئىسپاتلىغاندا، ئالدى بىلەن مۇۋاپىق كوئوردېناتنى تاللىۋالىمەن، شۇنىڭ بىلەن گېئومېترىيىلىك تېئورېمىنىڭ پەرىزى ۋە يەكۈنى هامان كۆپ ئەزالىقلار تەڭلىمىسى بولۇپ قالىدۇ، بۇ، پەرەز تەڭلىمىسى ۋە يەكۈن تەڭلىمىسى دەپ ئاتىلىدۇ. تېئورېما پەرىزىنى قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېترىيىلىك گرافىكلار، پەرەز تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ بىر يېشىمى ياكى نۆل نۇقتىسى بولىدۇ. تېئورېمىنىڭ كۆچكە ئىگە ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاشتا، پەرەز تەڭلىمىسىنىڭ نۆل نۇقتىسى يەكۈن كۆپ ئەزالىقنىمۇ نۆلگە تەڭ قىلىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاشتىن ئىبارەت.» كومپيۇتېرنىڭ تەرەققىي قىلىشى ۋە كۆپلىگەن ماتېماتىكلار (بولۇپمۇ ۋۇ ۋېنجۈن باشچىلىقىدىكى بىر تۈركۈم جۇڭگو ماتېماتىكلىرى) نىڭ تىرىشچانلىقى ئارقىسىدا، تەخمىنەن 1976 ـ يىلىنىڭ ئاخىرى ۋە 1977 ـ يىلىنىڭ بېشىدا، گېئومېترىيىلىك تېئورېمىلارنى ماشىنا بىلەن ئىسپاتلاش ئارزۇسى ئاخىر ئەمەلگە ئاشتى.

[1] جۇڭگو پەنلەر ئاكادېمىيىسىنىڭ ئاكادېمىكى، توپولوگىيە، ئاپتوماتىك خۇلاسىلەش، ماشىنا بىلەن ئىسپاتلاش، ئالگېبرالىق گېئومېترىيە، جۇڭگو ماتېماتىكا تارىخى، تاقابىللىق نەزەرىيىسى قاتارلىق تەتقىقات ساھەلىرىدە كۆرۈنەرلىك تۆھپىسى بار. 2001 ـ يىلى تۇنجى قېتىم دۆلەتلىك ئەڭ يۇقىرى دەرىجىلىك پەن ـ تېخنىكا مۇكاپاتىغا ئېرىشكەن.

2-4 تۈز سىزىق، چەمبەرلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

مەسىلە بىر پاراخوت تۈز سىزىقنى بويلاپ پورتقا قايتىش يولىدا، هاۋا رايى ئىستانسىسىنىڭ تەيفېڭ بورىنى توغرىسىدىكى مەلۇماتىنى تاپشۇرۇۋالدى: تەيفېڭ بورىنىنىڭ مەركىزى پاراخوتنىڭ دەل غەربىدىكى 70 km كېلىدىغان جايدا، تەسىرگە ئۇچراش دائىرىسى رادىئۇسى 30 km بولغان چەمبەر شەكىللىك رايوندىن ئىبارەت. پورت تەيفېڭ بورىنى مەركىزىنىڭ دەل شىمالىدىكى 40 km كېلىدىغان جايدا ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ئەگەر بۇ پاراخوت يۆرۈش يۆنىلىشىنى ئۆزگەرتمىسە، ئۇ هالدا ئۇ تەيفېڭ بورىنىنىڭ تەسىرىگە ئۇچرامدۇ؟



1.2.4 - رەسىم

ئەگەر تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلمىسا، سىز بۇ مەسىلىنى هەل قىلالامسىز؟

بۇ مەسىلىنى يېشىش ئۈچۈن، تەيفېڭ بورىنىنىڭ مەركىزىنى كوئوردېنات بېشى O قىلىپ، شەرقتىن غەربكە بولغان يۆنىلىشنى x ئوق قىلىپ ئېلىپ، 1.2.4 - رەسىمدىكىدەك تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزىمىز، ئۇنىڭدا 10 km ئۇزۇنلۇقنى بىرلىك ئۇزۇنلۇق قىلىۋالىمىز.

شۇنداق بولغاندا، تەيفېڭ بورىنىنىڭ تەسىرىگە ئۇچرايدىغان چەمبەر شەكىللىك رايونغا ماس كېلىدىغان مەركىزى O بولغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى:

$$x^2+y^2=9;$$

پاراخوت يولى ياتقان l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى:

$$4x+7y-28=0;$$

شۇنداق قىلىپ بۇ مەسىلە مەركىزى O بولغان چەمبەر بىلەن l تۈز سىزىقنىڭ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولۇش - بولماسلىق مەسىلىسىگە يىغىنچاقلىنىدۇ.

1-2-4 تۈز سىزىق بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، تۈز سىزىق بىلەن چەمبەرنىڭ ئۈچ خىل ئورۇن مۇناسىۋىتى بار:

(1) تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر ئۆزئارا كېسىشىدۇ، ئىككى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە؛

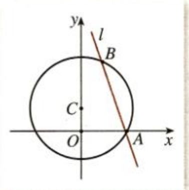
(2) تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر ئۆزئارا ئۇرۇنىدۇ، پەقەت بىرلا ئورتاق نۇقتىغا ئىگە؛

(3) تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر ئۆزئارا ئايرىلىپ تۇرىدۇ، ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئەمەس.

مۇلاھىزە ؟

تولۇقسىز ئوتتۇردا، بىز تۈز سىزىق بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە قانداق ھۆكۈم قىلغان؟ ئەمدى، تۈز سىزىق تەڭلىمىسى ۋە چەمبەر تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىپ ئۇلارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە قانداق ھۆكۈم قىلىمىز؟

تۆۋەندە بىز بىرنەچچە مىسالنى كۆرۈپ ئۆتەيلى:



2.2.4 ـ رەسىم

1 ـ مىسال. 2.2.4 ـ رەسىمدىكىدەك، تۈز سىزىق $l: 3x+y-6=0$ ۋە مەركىزى C بولغان چەمبەر $x^2+y^2-2y-4=0$ بېرىلگەن، l تۈز سىزىق بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلايلى؛ ئەگەر ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇلارنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تاپايلى.

تەھلىل: 1 ـ ئۇسۇل، l تۈز سىزىق بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىش دەل ئۇلارنىڭ تەڭلىمىلىرىدىن تۈزۈلگەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ ھەقىقىي يېشىمگە ئىگە بولۇش ـ بولماسلىقىغا قاراشتىن ئىبارەت؛ 2 ـ ئۇسۇل، چەمبەر مەركىزىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق بىلەن رادىئۇسنىڭ مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن، تۈز سىزىق بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىش.

1 ـ يېشىش ئۇسۇلى: l تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر تەڭلىمىسىدىن تۆۋەندىكى تەڭلىمىلەر سىستېمىسىغا ئىگە بولىمىز:

$$\begin{cases} 3x+y-6=0, & ① \\ x^2+y^2-2y-4=0. & ② \end{cases}$$

y نى يوقاتساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x^2-3x+2=0,$$

چۈنكى

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2-4\times1\times2 \\ &=1>0,\end{aligned}$$

شۇڭا l تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر ئۆزئارا كېسىشىدۇ، ئىككى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە.

2 ـ يېشىش ئۇسۇلى: چەمبەر $x^2+y^2-2y-4=0$ نى $x^2+(y-1)^2=5$ كە ئايلاندۇرۇشقا بولىدۇ، ئۇنىڭ چەمبەر مەركىزى C نىڭ كوئوردىناتى $(0, 1)$، رادىئۇسى $\sqrt{5}$ بولىدۇ، $C(0, 1)$ نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق:

$$d=\frac{|3\times0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}<\sqrt{5}.$$

شۇڭا، l تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر ئۆزئارا كېسىشىدۇ، ئىككى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە.

$x^2-3x+2=0$ نى يەشسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x_1=2,\quad x_2=1.$$

$x_1=2$نى تەڭلىمە ① گە قويساق، $y_1=0$ بولىدۇ؛

$x_2=1$ نى تەڭلىمە ① گە قويساق، $y_2=3$ بولىدۇ.

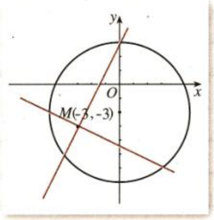
شۇنىڭ ئۈچۈن، l تۈز سىزىق بىلەن چەمبەرنىڭ ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى بار، ئۇلارنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $A(2, 0)$، $B(1, 3)$ بولىدۇ.

2 ـ مىسال. $M(-3,\ -3)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن l تۈز سىزىق چەمبەر $x^2+y^2+4y-21=0$ تەرىپىدىن كېسىلگەندە كېلىپ چىققان خوردىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $4\sqrt{5}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: چەمبەر تەڭلىمىسىنى ئۆلچەملىك كۆرۈنۈشتە يازساق تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$x^2+(y+2)^2=25,$$

شۇڭا چەمبەر مەركىزىنىڭ كوئوردېناتى $(0,\ -2)$، رادىئۇسى $r=5$ بولىدۇ.



3.2.4 ـ رەسىم

3.2.4 ـ رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىق چەمبەر تەرىپىدىن كېسىلگەندە كېلىپ چىققان خوردىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $4\sqrt{5}$ بولغانلىقتىن، خوردا ـ مەركەز ئارىلىقى:

$$\sqrt{5^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{5},$$

يەنى چەمبەر مەركىزىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق $\sqrt{5}$ بولىدۇ.

شەكىللەرنىڭ گېئومېتىرىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىدىن مۇۋاپىق پايدىلانغاندا، هېسابلاشلارنى ئاددىيلاشتۇرۇشقا ياردىمى بولىدۇ.

چۈنكى l تۈز سىزىق $M(-3,\ -3)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ، شۇڭا تاپماقچى بولغان l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تۆۋەندىكىدەك پەرەز قىلىشقا بولىدۇ:

$$y+3=k(x+3),$$

يەنى

$$kx-y+3k-3=0.$$

نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق فورمۇلىسىغا ئاساسەن، چەمبەر مەركىزىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق:

$$d=\frac{|2+3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

شۇڭا،

$$\frac{|2+3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5},$$

يەنى

$$|3k-1|=\sqrt{5+5k^2},$$

ئىككى تەرەپنى كۋادراتقا كۆتۈرۈپ رەتلىسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$2k^2-3k-2=0,$$

بۇنى يەشسەك، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$k=-\frac{1}{2} \text{ ياكى } k=2.$$

شۇڭا، تاپماقچى بولغان l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى ئايرىم ـ ئايرىم هالدا:

$$y+3=-\frac{1}{2}(x+3),$$

ياكى

$$y+3=2(x+3).$$

يەنى

$$x+2y+9=0 \text{ ياكى } 2x-y+3=0.$$

يۇقىرىقى مىسالدىن شۇنى بايقايمىزكى: l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىشنىڭ ئىككى خىل ئۇسۇلى بار. بىرىنچى خىل ئۇسۇل، l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەرنىڭ تەڭلىمىلىرىدىن تۈزۈلگەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ يېشىمى بار ـ يوقلۇقىغا ھۆكۈم قىلىش. ئەگەر يېشىمى بار بولسا، l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەر ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ. ئىككى گۇرۇپپا ھەقىقىي يېشىمى بار بولسا، l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەر ئۆزئارا كېسىشىدۇ؛ بىر گۇرۇپپا ھەقىقىي يېشىمى بار بولسا، l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەر ئۆزئارا ئۇرۇنىدۇ؛ ھەقىقىي يېشىمى بولمىسا، l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەر ئۆزئارا ئايرىلىپ تۇرىدۇ. ئىككىنچى خىل ئۇسۇل، C چەمبەرنىڭ مەركىزىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق d بىلەن رادىئۇس r نىڭ مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىش. ئەگەر $d<r$ بولسا، l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەر ئۆزئارا كېسىشىدۇ؛ ئەگەر $d=r$ بولسا، l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەر ئۆزئارا ئۇرۇنىدۇ؛ ئەگەر $d>r$ بولسا، l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەر ئۆزئارا ئايرىلىپ تۇرىدۇ.

مەشىق

1. بۇ پاراگرافنىڭ سۆز بېشىدىكى مەسىلىنى يېشىڭ.

2. تۈز سىزىق $4x+3y-35=0$ بىلەن مەركىزى كوئوردىنات بېشىدا ياتقان C چەمبەرنىڭ ئۆزئارا ئۇرۇنىدىغانلىقى بېرىلگەن، C چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

3. تۈز سىزىق $3x+4y+2=0$ بىلەن چەمبەر $x^2+y^2-2x=0$ نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ.

4. تۈز سىزىق l: $y=x+6$، چەمبەر C: $x^2+y^2-2y-4=0$ بېرىلگەن. l تۈز سىزىق بىلەن C چەمبەرنىڭ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ياكى ئىگە ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ، قانچە ئورتاق نۇقتىسى بار؟

2-2-4 چەمبەر بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى

يۇقىرىدا بىز تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىپ تۈز سىزىق بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى مۇھاكىمە قىلدۇق. ئەمدى چەمبەر تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىپ، چەمبەر بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

مۇلاھىزە ؟

چەمبەر بىلەن چەمبەرنىڭ قانچە خىل ئورۇن مۇناسىۋىتى بار؟ چەمبەر تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىپ، ئۇلارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە قانداق ھۆكۈم قىلىش كېرەك؟

3 ـ مىسال. چەمبەر C_1: $x^2+y^2+2x+8y-8=0$، چەمبەر C_2: $x^2+y^2-4x-4y-2=0$ بېرىلگەن، C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلايلى.

تەھلىل: 1 ـ ئۇسۇل، C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەرنىڭ قانچە ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ئىكەنلىكى، ئۇلارنىڭ تەڭلىمىلىرىدىن تۈزۈلگەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ قانچە گۇرۇپپا ھەقىقىي يېشىمى بار ـ لىقى تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ؛ 2 ـ ئۇسۇل، مەركەزلەر ئارىلىقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن ئىككى رادىئۇس ـ نىڭ ئۇزۇنلۇقلىرىنىڭ يىغىندىسى r_1+r_2 ياكى ئىككى رادىئۇس ئۇزۇنلۇقلىرى ئايرىمىسىنىڭ مۇتلەق قىممىتى $|r_1-r_2|$ نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن، ئىككى چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسى ـ ۋىتىگە ھۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ.

1 ـ يېشىش ئۇسۇلى: C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەرنىڭ تەڭلىمىلىرىدىن تۆۋەندىكى تەڭلىمىلەر سىستېمىسىغا ئىگە بولىمىز:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+8y-8=0, & ① \\ x^2+y^2-4x-4y-2=0. & ② \end{cases}$$

C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەرنى ھەمدە تەڭلىمە ③ ئىپادىلىگەن تۈز سىزىقنى سىزىپ چىقىڭ، نېمىنى بايقىدىڭىز؟ سەۋەبىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

② − ① دىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x+2y-1=0, \qquad ③$$

③ تىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$y=\frac{1-x}{2},$$

يۇقىرىقى ئىپادىنى ① دىكى ئورنىغا قويۇپ رەتلىسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x^2-2x-3=0. \qquad ④$$

تەڭلىمە ④ نىڭ يىلتىزىنىڭ ئېنىقلىغۇچىسى:

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)$$
$$=16>0,$$

بۇ مىسالدا پەقەت C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەرنىڭ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ياكى ئىگە ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىنسىلا بولىدۇ، ئورتاق نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىش ھاجەتسىز، شۇڭا تەڭلىمە ④ نى يېشىپ كونكرېت ئىككى ھەقىقىي يىلتىزنى تېپىپ چىقىش تەلەپ قىلىنمايدۇ.

شۇڭا تەڭلىمە ④ نىڭ ئۆزئارا تەڭ بولمىغان ئىككى ھەقىقىي يىلتىزى x_1، x_2 بار، x_1، x_2 لەرنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا تەڭلىمە ③ تىكى ئورنىغا قويساق، y_1، y_2 لەرگە ئىگە بولىمىز.

شۇڭا C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەرنىڭ ئوخشاش بولمىغان ئىككى ئورتاق نۇقتىسى $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ بار.

2 ـ يېشىش ئۇسۇلى: C_1 چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى ئۆلچەملىك تەڭلىمىگە ئايلاندۇرساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$(x+1)^2+(y+4)^2=25.$$

C_1 چەمبەرنىڭ مەركىزى $(-1, -4)$، رادىئۇسى $r_1=5$ بولىدۇ.

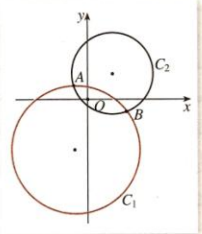
C_2 چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى ئۆلچەملىك تەڭلىمىگە ئايلاندۇرساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=10,$$

C_2 چەمبەرنىڭ مەركىزى $(2, 2)$، رادىئۇسى $r_2=\sqrt{10}$ بولىدۇ.

C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەرنىڭ مەركەزلەر سىزىقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى:

$$\sqrt{(-1-2)^2+(-4-2)^2}=3\sqrt{5},$$



4.2.4 ـ رەسىم

C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەر رادىئۇسلىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقلىرىنىڭ يىغىندىسى:

$$r_1+r_2=5+\sqrt{10},$$

ئىككى رادىئۇس ئۇزۇنلۇقلىرىنىڭ ئايرىمىسى:

$$r_1-r_2=5-\sqrt{10}.$$

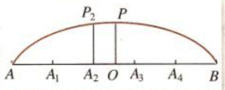
$5-\sqrt{10}<3\sqrt{5}<5+\sqrt{10}$، يەنى $r_1-r_2<3\sqrt{5}<r_1+r_2$ بولغانلىقتىن، C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەر ئۆزئارا كېسىشىدۇ (4.2.4 ـ رەسىمدىكىدەك)، ئۇلار A، B دىن ئىبارەت ئىككى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە.

مەشىق

$C_1: x^2+y^2+2x+3y+1=0$ چەمبەر، $C_2: x^2+y^2+4x+3y+2=0$ چەمبەر بېرىلگەن، C_1 چەمبەر بىلەن C_2 چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ.

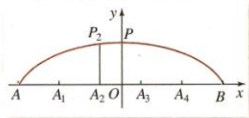
3-2-4 تۈز سىزىق ۋە چەمبەر تەڭلىمىسىنىڭ قوللىنىلىشى

تۈز سىزىق ۋە چەمبەر تەڭلىمىسى ئىشلەپچىقىرىش، تۇرمۇش ئەمەلىيىتى ھەمدە ماتېماتىكىدا كەڭ قوللىنىلىدۇ، بۇ پاراگرافتا بىرنەچچە مىسال ئارقىلىق تۈز سىزىق ۋە چەمبەر تەڭلىمىسىنىڭ ئەمەلىي تۇرمۇش ھەمدە تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىكى قوللىنىلىشىنى چۈشەندۈرىمىز.



5.2.4 ـ رەسىم

4 ـ مىسال. 5.2.4 ـ رەسىمدە مەلۇم بىر چەمبەر شەكىللىك ئەگمە كۆۋرۈكنىڭ بىر ئەگمىسىنىڭ سخېمىسى بېرىلگەن. بۇ چەمبەر ئەگمىسىنىڭ ئارتىلىش ئارىلىقى $AB=20\text{ m}$، ئەگمە ئېگىزلىكى $OP=4\text{ m}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ئەگمىنى ياساشتا ھەر 4 m ئارىلىقتا بىر تۈۋرۈك قويۇشقا توغرا كەلسە، تۈۋرۈك A_2P_2 نىڭ ئېگىزلىكىنى تاپايلى (0.01 m غىچە ئېنىقلىقتا).



6.2.4 ـ رەسىم

تەھلىل: 6.2.4 ـ رەسىمدىكىدەك تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇپ، پەقەت P_2 نىڭ ئوردىناتىنى تېپىپ چىقساقلا، تۈۋرۈك A_2P_2 نىڭ ئېگىزلىكىنى تاپالايمىز.

يېشىش: 6.2.4 ـ رەسىمدىكىدەك چەمبەر مەركىزى y ئوق ئۈستىدە ياتىدىغان قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇۋالىمىز. چەمبەر مەركىزىنىڭ كوئوردىناتىنى $(0, b)$، رادىئۇسىنى r دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا چەمبەر تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$x^2+(y-b)^2=r^2.$$

تۆۋەندە b بىلەن r نىڭ قىممىتىنى بەلگىلەيمىز.

P، B لار چەمبەرنىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، ئۇلارنىڭ كوئوردىناتى $(0, 4)$، $(10, 0)$لار ئوخشاشلا

تەڭلىمە $x^2+(y-b)^2=r^2$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ، شۇنىڭ بىلەن تۆۋەندىكى تەڭلىمىلەر سىستېمىسى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\begin{cases}0^2+(4-b)^2=r^2,\\10^2+(0-b)^2=r^2.\end{cases}$$

بۇنى يەشسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$b=-10.5,\ \ r^2=14.5^2.$$

شۇڭا، بۇ چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$x^2+(y+10.5)^2=14.5^2.$$

P_2 نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى $x=-2$ نى چەمبەر تەڭلىمىسىگە قويساق تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$(-2)^2+(y+10.5)^2=14.5^2,$$

يەنى

$$y+10.5=\sqrt{14.5^2-(-2)^2}$$

(P_2 نىڭ ئوردىناتى $y>0$ بولغانلىقتىن، كۋادرات يىلتىزنىڭ مۇسبەت قىممىتى ئېلىنىدۇ).

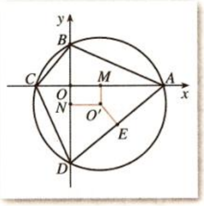
شۇڭا

ئەگەر كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلمىسا، بۇ مەسىلىنى يېشەلەمسىز؟

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{14.5^2-(-2)^2}-10.5\\&\approx 14.36-10.5\\&=3.86\ (\mathrm{m}).\end{aligned}$$

جاۋابى: A_2P_2 تۈۋرۈكنىڭ ئېگىزلىكى تەخمىنەن 3.86m بولىدۇ.

5 ـ مىسال. چەمبەرگە ئىچتىن تېگىشكەن تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك ئىكەنلىكى بېرىلگەن، چەمبەر مەركىزىدىن بۇ تۆت تەرەپلىكنىڭ بىر تەرىپىگىچە بولغان ئارىلىق بۇ تەرەپنىڭ قارشىسىدىكى تەرەپ ئۇزۇنلۇقىنىڭ يېرىمىغا تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.



7.2.4 ـ رەسىم

تەھلىل: 7.2.4 ـ رەسىمدىكىدەك، ئۆزئارا تىك ئىككى دىئاگونال ياتقان تۈز سىزىقلارنى كوئوردېنات ئوقلىرى قىلىۋالىمىز. بۇ مەسىلىنى ھەل قىلىشنىڭ ئاچقۇچى چەمبەر مەركىزى O' نىڭ كوئوردېناتىنى تېپىشتىن ئىبارەت. O' نۇقتا ئارقىلىق AC غا تىك سىزىق ئۆتكۈزسەك (تىك ئاساسى M)، M بولسا AC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولۇپ، تىك ئاساسى M نىڭ ئابسىسساسى بىلەن O' نىڭ ئابسىسساسى ئوخشاش بولىدۇ. ئوخشاش ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ O' نىڭ ئوردىناتىنى تېپىپ چىقىمىز.

ئىسپات: 7.2.4 ـ رەسىمدىكىدەك، تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ بىر بىرىگە تىك بولغان CA، DB دىئاگوناللىرى ياتقان تۈز سىزىقلارنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا x ئوق، y ئوق قىلىپ، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزىمىز، $A(a, 0)$، $B(0, b)$، $C(c, 0)$، $D(0, d)$ دەپ پەرەز قىلىمىز.

تۆت تەرەپلىك $ABCD$ غا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەرنىڭ مەركىزى O' ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا AC، BD، AD لارنىڭ تىك سىزىقىنى ئۆتكۈزسەك (تىك ئاساسلىرى M، N، E)، M، N، E لار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا كېسىك AC، BD، AD لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولىدۇ. كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىنىڭ كوئوردېنات فورمۇلىسىدىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$x_{O'}$، $y_{O'}$ لار ئايرىم ـ ئايرىم هالدا O' نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى ۋە ئورداناتىنى ئىپادىلەيدۇ.

$$x_{O'}=x_M=\frac{a+c}{2},\ \ y_{O'}=y_N=\frac{b+d}{2},\ \ x_E=\frac{a}{2},\ \ y_E=\frac{d}{2}.$$

شۇڭا،

$$|O'E|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}.$$

يەنە

$$|BC|=\sqrt{b^2+c^2},$$

شۇڭا

$$|O'E|=\frac{1}{2}|BC|.$$

كوئوردىنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى يېشكەندە، ئالدى بىلەن كوئوردىنات ۋە تەڭلىمە ئارقىلىق ماس گېئومېترىيىلىك ئېلېمېنت: نۇقتا، تۈز سىزىق، چەمبەر قاتارلىقلارنى ئىپادىلىۋېلىپ، گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇۋالىمىز؛ ئاندىن ئالگېبرالىق ھېسابلاش ئارقىلىق ئالگېبرالىق مەسىلىلەرنى يېشىمىز؛ ئاخىرىدا ئالگېبرالىق ھېسابلاش نەتىجىسىنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى چۈشەندۈرۈپ، گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنىڭ يەكۈنىگە ئىگە بولىمىز. بۇ دەل تەكشىلىكتىكى گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى كوئوردىنات ئۇسۇلى ئارقىلىق يېشىشنىڭ «ئۈچ باسقۇچى» دۇر:

بىرىنچى باسقۇچ: مۇۋاپىق تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، مەسىلىدىكى گېئومېترىيىلىك ئېلېمېنتلارنى كوئوردىنات ۋە تەڭلىمە ئارقىلىق ئىپادىلەپ، تەكشىلىكتىكى گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇش.

ئىككىنچى باسقۇچ: ئالگېبرالىق مەسىلىلەر ئالگېبرالىق ھېسابلاش ئارقىلىق ھەل قىلىنىدۇ.

ئۈچىنچى باسقۇچ: ئالگېبرالىق ھېسابلاش نەتىجىسىنى گېئومېترىيىلىك يەكۈنگە «تەرجىمە» قىلىش.

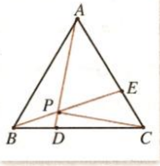
مەشىق

(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. تۈز سىزىق $l: 2x-y-2=0$ چەمبەر $C: (x-3)^2+y^2=9$ تەرىپىدىن كېسىلگەندە كېلىپ چىققان خوردىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

2. جاۋجۇ كۆۋرۈكىنىڭ ئارتىلىش ئارىلىقى $37.4\,\mathrm{m}$، ئەگمىسىنىڭ ئېگىزلىكى تەخمىنەن $7.2\,\mathrm{m}$ بولسا، چەمبەر شەكىللىك بۇ ئەگمە كۆۋرۈكنىڭ ئەگمىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

3. مەلۇم چەمبەر شەكىللىك ئەگمە كۆۋرۈكنىڭ سۇ يۈزىدىكى ئارتىلىش ئارىلىقى $20\,\mathrm{m}$، ئەگمە ئېگىزلىكى $4\,\mathrm{m}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ھازىر كەڭلىكى $10\,\mathrm{m}$، سۇ يۈزىدىن ئېگىزلىكى $3\,\mathrm{m}$ بولغان بىر كېمە بار بولسا، بۇ كېمە كۆۋرۈك ئاستىدىن ئۆتەلەمدۇ؟



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. تەڭ تەرەپلىك $\triangle ABC$ دا، D، E نۇقتىلار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا BC، AC تەرەپلەرنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ ھەمدە $|BD|=\frac{1}{3}|BC|$، $|CE|=\frac{1}{3}|CA|$، AD، BE لار P نۇقتىدا ئۆز ئارا كېسىشىدۇ. $AP\perp CP$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

2.4 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۈز سىزىق $4x-3y=50$ بىلەن چەمبەر $x^2+y^2=100$ نىڭ ئورنى مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ. ئەگەر ئۇلار ئۆزئارا كېسىشسە، كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

2. تۆۋەندىكى شەرتلەر بەلگىلىگەن چەمبەر تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ شەكلىنى سىزىپ چىقىڭ:

(1) چەمبەرنىڭ مەركىزى $M(3,\ -5)$ ھەمدە ئۇ تۈز سىزىق $x-7y+2=0$ بىلەن ئۆزئارا ئۇرۇنىدۇ؛

(2) چەمبەرنىڭ مەركىزى y ئوق ئۈستىدە، رادىئۇسى 5 ھەمدە ئۇ تۈز سىزىق $y=6$ بىلەن ئۆزئارا ئۇرۇنىدۇ.

3. $N(1,\ 3)$ نى مەركەز قىلغان ھەمدە تۈز سىزىق $3x-4y-7=0$ بىلەن ئۆزئارا ئۇرۇنىدىغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4. مەركىزى تۈز سىزىق $x-y-4=0$ نىڭ ئۈستىدە ياتقان ھەمدە چەمبەر $x^2+y^2+6x-4=0$ بىلەن چەمبەر $x^2+y^2+6y-28=0$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىدىن ئۆتكەن چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

5. تۈز سىزىق $l: 3x-y-6=0$ چەمبەر $C: x^2+y^2-2x-4y=0$ تەرىپىدىن كېسىلگەندە كېلىپ چىققان خوردا AB نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

6. مەركىزى تۈز سىزىق $3x-y=0$ نىڭ ئۈستىدە ياتقان، x ئوق بىلەن ئۆزئارا ئۇرۇنىدىغان ھەمدە تۈز سىزىق $x-y=0$ تەرىپىدىن كېسىلگەندە كېلىپ چىققان خوردىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $2\sqrt{7}$ بولىدىغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

7. چەمبەر $C: x^2+y^2-x+2y=0$ نىڭ تۈز سىزىق $l: x-y+1=0$ گە نىسبەتەن سىممېترىك بولغان چەمبىرىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

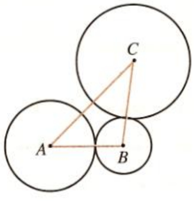
8. $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ دا، يانتۇ تەرەپ BC نىڭ ئۇزۇنلۇقى m، BC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى O نى مەركەز، $n\left(n<\frac{m}{2}\right)$ نى رادىئۇس قىلىپ چەمبەر سىزغاندا، BC بىلەن ئايرىم - ئايرىم ھالدا P، Q ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدۇ، $|AP|^2+|AQ|^2+|PQ|^2$ نىڭ مۇقىم قىممەت بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

9. چەمبەر $x^2+y^2-4=0$ بىلەن چەمبەر $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ نىڭ ئومۇمىي خوردىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

10. $M(2,\ -2)$ نۇقتىدىن ھەمدە چەمبەر $x^2+y^2-6x=0$ بىلەن $x^2+y^2=4$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىدىن ئۆتكەن چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

11. $M(3,\ -1)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە چەمبەر $C: x^2+y^2+2x-6y+5=0$ بىلەن $N(1,\ 2)$ نۇقتىدا ئۆزئارا ئۇرۇنىدىغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

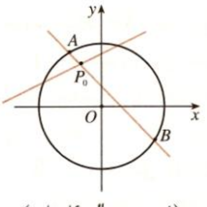


(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. رەسىمدىكىدەك، مەلۇم ئىستانوكنىڭ ئۈچ دانە چىشلىق چاقى بېرىلگەن، A بىلەن B چىشلىشىدۇ، C بىلەن B مۇ چىشلىشىدۇ. ئەگەر A چاقنىڭ دىئامېتىرى 200 cm، B چاقنىڭ دىئامېتىرى 120 cm، C چاقنىڭ دىئامېتىرى 250 cm ھەمدە $\angle A=45°$ بولسا، مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، كوئوردىنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ A، C ئىككى چاقنىڭ مەركەزلەر ئارىلىقىنى تېپىڭ (1cm غىچە ئېنىقلىقتا).

2. $A(-2,\ -2)$، $B(-2,\ 6)$، $C(4,\ -2)$ نۇقتىلار بېرىلگەن، P نۇقتا چەمبەر $x^2+y^2=4$ نىڭ ئۈستىدە ھەرىكەت قىلىدۇ، $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ.

3. چەمبەر $x^2+y^2=4$، تۈز سىزىق $l: y=x+b$ لار بېرىلگەن. b قانداق قىممەت ئالغاندا، چەمبەر $x^2+y^2=4$ نىڭ ئۈستىدىكى 3 نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقلار ئوخشاشلا 1 گە تەڭ بولىدۇ؟



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكىدەك، چەمبەر $x^2+y^2=8$ نىڭ ئىچىدە بىر $P_0(-1,\ 2)$ نۇقتا بار، AB بولسا P_0 نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇق بۇلۇڭى α بولغان خوردا.

(1) $\alpha=135°$ بولغاندا، AB نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ؛

(2) AB خوردا P_0 نۇقتا تەرىپىدىن تەڭ ئىككىگە بۆلۈنگەندە، AB تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى يېزىپ چىقىڭ.

5. $P(-2,\ -3)$ نۇقتا ۋە Q نى مەركەز قىلغان چەمبەر $(x-4)^2+(y-2)^2=9$ بېرىلگەن.

(1) PQ نى دىئامېتىر، Q' نى مەركەز قىلغان چەمبەرنى سىزىڭ، ئاندىن ئۇنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ؛

(2) Q نى مەركەز قىلغان چەمبەر بىلەن Q' نى مەركەز قىلغان چەمبەرنىڭ ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى A، B نى بەلگىلەڭ. تۈز سىزىق PA، PB لار Q نى مەركەز قىلغان چەمبەرنىڭ ئۇرۇنمىلىرى بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

(3) AB تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

3-4 بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى

بىزگە مەلۇمكى، سان ئوقى Ox ئۈستىدىكى M نۇقتىنى ئۇنىڭغا ماس بولغان ھەقىقىي سان x ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى M نۇقتىنى بىر جۈپ تەرتىپلىك ھەقىقىي سان (x, y) ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

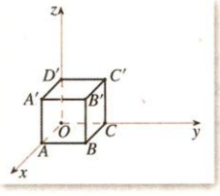
بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، بوشلۇقتىكى نۇقتىلارنى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى (x, y, z) ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

1-3-4 بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى

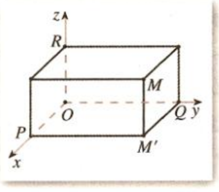
1.3.4 ـ رەسىمدىكىدەك، $OABC-D'A'B'C'$ بىرلىك كۇب. O نى باشلىنىش نۇقتىسى، ئايرىم ـ ئايرىم OA، OC، OD' نۇرلارنىڭ يۆنىلىشىنى ئوڭ يۆنىلىش، كېسىك OA، OC، OD' لارنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى بىرلىك ئۇزۇنلۇق قىلىپ، ئۈچ دانە سان ئوقى: x ئوق، y ئوق، z ئوقلارنى تۇرغۇزساق، بۇ چاغدا بىر **بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى** $Oxyz$ نى تۇرغۇزغان بولىمىز، بۇنىڭدىكى O نۇقتا **كوئوردىنات بېشى**، x ئوق، y ئوق، z ئوقلار **كوئوردىنات ئوقلىرى** دەپ ئاتىلىدۇ. ھەر ئىككى كوئوردىنات ئوقىدىن ئۆتكەن تەكشىلىك **كوئوردىنات تەكشىلىكى** دەپ ئاتىلىدۇ، ئۇلار ئايرىم ـ ئايرىم xOy تەكشىلىك، yOz تەكشىلىك، zOx تەكشىلىك دېيىلىدۇ.

> تەكشىلىكتە بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى $Oxyz$ نى سىزغاندا، ئادەتتە $\angle xOy=135^\circ$، $\angle yOz=90^\circ$ قىلىپ سىزىلىدۇ.

بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، ئوڭ قولنىڭ باش بارمىقىنى x ئوقىنىڭ ئوڭ يۆنىلىشىگە، كۆرسەتكۈچ بارمىقىنى y ئوقىنىڭ ئوڭ يۆنىلىشىگە توغرىلىساق، ئەگەر ئوتتۇرا بارماق كۆرسەتكەن يۆنىلىش z ئوقىنىڭ ئوڭ يۆنىلىشى بولسا، ئۇ ھالدا بۇ كوئوردىنات سىستېمىسى **ئوڭ قول تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى** دەپ ئاتىلىدۇ. ئەگەر ئالاھىدە ئەسكەرتىش بېرىلمىسە، بۇ كىتابتا تۇرغۇزۇلغان كوئوردىنات سىستېمىلىرى ئوڭ قول تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى كۆرسىتىدۇ.



1.3.4 ـ رەسىم



2.3.4 ـ رەسىم

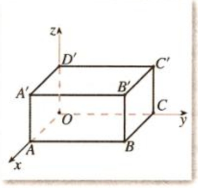
2.3.4 - رەسىمدىكىدەك، M نۇقتىنى بوشلۇقتىكى بىر مۇقىم نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، M نۇقتا ئارقىلىق ئايرىم - ئايرىم ھالدا x ئوق، y ئوق، z ئوقلارغا تىك تەكشىلىكلەرنى ئۆتكۈزسەك، ئۇلار تەرتىپ بويىچە x ئوق، y ئوق، z ئوقلار بىلەن P، Q ۋە R نۇقتىلاردا كېسىشىدۇ. P، Q ۋە R نۇقتىلارنىڭ x ئوق، y ئوق، z ئوقلاردىكى كوئوردېناتىنى ئايرىم - ئايرىم x، y ۋە z دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا M نۇقتا بىردىنبىر ئېنىقلانغان تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى (x, y, z) قا ماس كېلىدۇ.

ئەكسىچە بولغاندا، تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى (x, y, z) بېرىلسە، بىز x ئوق، y ئوق ۋە z ئوق ئۈستىدىن تەرتىپ بويىچە كوئوردېناتلىرى x، y ۋە z بولغان P، Q ۋە R نۇقتىلارنى ئېلىپ ئايرىم - ئايرىم P، Q ۋە R نۇقتىلار ئارقىلىق x، y ۋە z ئوقلارغا تىك قىلىپ بىردىن تەكشىلىك ئۆتكۈزسەك، بۇ ئۈچ تەكشىلىكنىڭ بىردىنبىر كېسىشىش نۇقتىسى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى (x, y, z) بەلگىلىگەن M نۇقتا بولىدۇ.

1.3.4 - رەسىمدە، yOz تەكشىلىكتىكى C' نۇقتا، D' نۇقتىلارنىڭ كوئوردېناتىنى ھەمدە zOx تەكشىلىكتىكى A' نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى بەلگىلەپ بېرىڭ.

شۇنداق قىلىپ، بوشلۇقتىكى بىر M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى (x, y, z) ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ، تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى (x, y, z) بولسا M نۇقتىنىڭ **بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى كوئوردېناتى** دەپ ئاتىلىپ، $M(x, y, z)$ قىلىپ يېزىلىدۇ. بۇنىڭدا x بولسا M نۇقتىنىڭ **ئابسىسساسى**، y بولسا M نۇقتىنىڭ **ئوردىناتى**، z بولسا M نۇقتىنىڭ **ئاپلىكاتاسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

1.3.4 - رەسىمدە، O، A، B، C نۇقتىلارنىڭ كوئوردېناتلىرى ئايرىم - ئايرىم ھالدا $(0, 0, 0)$، $(1, 0, 0)$، $(1, 1, 0)$، $(0, 1, 0)$ بولىدۇ، بۇ تۆت نۇقتا xOy تەكشىلىكىدە بولۇپ، ئۇلارنىڭ ئاپلىكاتاسى ئوخشاشلا نۆل بولىدۇ. B' نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(1, 1, 1)$ بولىدۇ.



3.3.4 - رەسىم

1 - مىسال. 3.3.4 - رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد $OABC-D'A'B'C'$ دا، $|OA|=3$، $|OC|=4$، $|OD'|=2$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، D'، C'، A'، B' تۆت نۇقتىنىڭ كوئوردېناتلىرىنى يېزىپ چىقايلى.

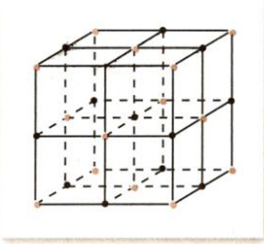
يېشىش: D' نۇقتا z ئوقنىڭ ئۈستىدە ھەمدە $OD'=2$، ئۇنىڭ ئاپلىكاتاسى 2؛ ئۇنىڭ ئابسىسساسى x بىلەن ئوردىناتى y نىڭ ھەر ئىككىسى نۆل، شۇڭا D' نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(0, 0, 2)$ بولىدۇ.

C نۇقتا y ئوقنىڭ ئۈستىدە ھەمدە $OC'=4$، ئۇنىڭ ئوردىناتى 4؛ ئۇنىڭ ئابسىسساسى x بىلەن ئاپلىكاتاسى z ئوخشاشلا نۆل، شۇڭا C نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(0, 4, 0)$ بولىدۇ.

ئوخشاش قائىدە بويىچە، A' نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(3, 0, 2)$ بولىدۇ.

B' نۇقتىنىڭ xOy تەكشىلىكتىكى پرويېكسىيىسى B، شۇڭا ئۇنىڭ ئابسىسساسى x ۋە ئوردىناتى y بىلەن B نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى x ۋە ئوردىناتى y ئوخشاش بولىدۇ. xOy تەكشىلىكتە، B نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى $x=3$، ئوردىناتى $y=4$؛ B' نۇقتىنىڭ z ئوقتىكى پرويېكسىيىسى D'، ئۇنىڭ ئاپلىكاتاسى بىلەن D' نۇقتىنىڭ ئاپلىكاتاسى ئوخشاش، D' نۇقتىنىڭ ئاپلىكاتاسى $z=2$.

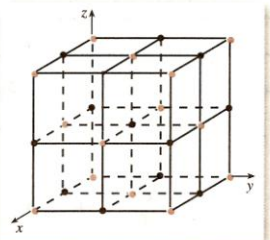
شۇڭا B' نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(3, 4, 2)$ بولىدۇ.



4.3.4 ـ رەسىم

2 ـ مىسال. كرىستالنىڭ ئاساسىي بىرلىكى كرىستال ھۈجەيرىسى دەپ ئاتىلىدۇ. 4.3.4 ـ رەسىمدە ئاش تۇزىنىڭ كرىستال ھۈجەيرىسىنىڭ سخېمىسى بېرىلگەن (قىر ئۇزۇنلۇقى $\frac{1}{2}$ بولغان سەككىز دانە كىچىك كۇبنىڭ دۆۋىلىنىشىدىن ھاسىل بولغان كۇب دەپ قاراشقا بولىدۇ). ئۇنىڭ ئىچىدىكى رەڭلىك نۇقتىلار ناترىي ئاتومىغا ۋەكىللىك قىلىدۇ، قارا نۇقتىلار خلور ئاتومىغا ۋەكىللىك قىلىدۇ. 5.3.4 ـ رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى $Oxyz$ نى تۇرغۇزۇپ، بارلىق ناترىي ئاتوملىرى تۇرغان ئورۇنلارنىڭ كوئوردىناتلىرىنى يېزىپ چىقايلى.

يېشىش: رەسىمدىكى ناترىي ئاتوملىرىنى تۆۋەن، ئوتتۇرا، يۇقىرى ئۈچ قاتلامغا ئايرىۋېلىپ، ئۇلار تۇرغان ئورۇنلارنىڭ كوئوردىناتلىرىنى يېزىپ چىقىمىز.



5.3.4 ـ رەسىم

تۆۋەن قاتلامدىكى ئاتوملارنىڭ ھەممىسى xOy تەكشىلىكىدە، ئۇلار تۇرغان ئورۇنلارنىڭ ئاپلىكاتاسى 0 بولىدۇ، شۇڭا بۇ بەش دانە ناترىي ئاتومى تۇرغان ئورۇنلارنىڭ كوئوردىناتلىرى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا:

$$(0,0,0),\ (1,0,0),\ (1,1,0),\ (0,1,0),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right);$$

ئوتتۇرا قاتلامدىكى ئاتوملار تۇرغان تەكشىلىك xOy تەكشىلىككە پاراللېل بولۇپ، z ئوق بىلەن كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ئاپلىكاتاسى $\frac{1}{2}$ بولىدۇ. شۇڭا، بۇ تۆت دانە ناترىي ئاتومى تۇرغان ئورۇنلارنىڭ كوئوردىناتلىرى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا:

$$\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\ \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right),\ \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);$$

يۇقىرى قاتلامدىكى ئاتوملار تۇرغان تەكشىلىك xOy تەكشىلىككە پاراللېل بولۇپ، z ئوق بىلەن كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ئاپلىكاتاسى 1 بولىدۇ. شۇڭا، بۇ بەش ناترىي ئاتومى تۇرغان ئورۇننىڭ كوئوردىناتلىرى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا:

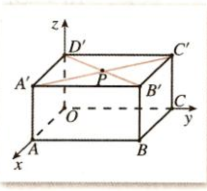
$$(0,0,1),\ (1,0,1),\ (1,1,1),\ (0,1,1),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right).$$

مەشىق

1. بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا تۆۋەندىكى نۇقتىلارنى بەلگىلەڭ:

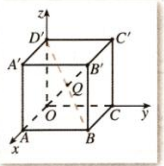
$A(0,2,4)$, $B(1,0,5)$, $C(0,2,0)$, $D(1,3,4)$.

2. رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد $OABC-D'A'B'C'$ دا، $|OA|=3$، $|OC|=4$، $|OD'|=3$، $A'C'$ بىلەن $B'D'$ ئۆزئارا P نۇقتىدا كېسىشىدۇ، C، B'، P نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتلىرىنى ئايرىم ـ ئايرىم يېزىڭ.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، قىر ئۇزۇنلۇقى a بولغان كۇب $OABC-D'A'B'C'$ دا، دىئاگونال OB' بىلەن BD' ئۆز ئارا Q نۇقتىدا كېسىشىدۇ. O چوققىسى كوئوردىنات بېشىدا، OA، OC لار ئايرىم ـ ئايرىم x ئوق، y ئوقلارنىڭ مۇسبەت يېرىم ئوقى ئۈستىدە ياتسا، Q نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى يېزىپ چىقىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

2-3-4 بوشلۇقتىكى ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسى

ئارىلىق بولسا گېئومېترىيىدىكى ئاساسىي ئۆلچەم، گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەر ۋە بىر قىسىم ئەمەلىي مەسىلىلەر دائىم ئارىلىق مەسىلىلىرىگە چېتىلىدۇ، مەسىلەن، قۇرۇلۇش لايىھىسىدە دائىم بوشلۇقتىكى ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى ھېسابلاشقا توغرا كېلىدۇ. بۇ ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ئارقىلىق ئىپادىلەپ بېرەلەمسىز؟

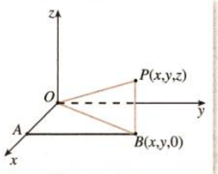
مۇلاھىزە ؟

تەكشىلىكتىكى ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسىنىڭ كەلتۈرۈپ چىقىرىلىش جەريانىغا سېلىشتۇرۇپ، بوشلۇقتىكى ئىككى نۇقتا $P_1(x_1, y_1, z_1)$، $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسىنى پەرەز قىلالامسىز؟

ئەمدى، بوشلۇقتىكى ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

ئالدى بىلەن ئاددىي ئەھۋاللارنى كۆرۈپ باقايلى.

بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى (x, y, z) دەپ پەرەز قىلىپ، P نۇقتىدىن كوئوردىنات بېشى O غىچە بولغان ئارىلىقنى تاپايلى:



6.3.4 ـ رەسىم

6.3.4 ـ رەسىمدىكىدەك، P نۇقتىنىڭ xOy تەكشىلىكتىكى پروېكسىيىسىنى B دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا B نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(x, y, 0)$ بولىدۇ.

xOy تەكشىلىكتە، $|OB| = \sqrt{x^2+y^2}$.

$\mathrm{Rt}\triangle OBP$ دا، گوگۇ تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$|OP| = \sqrt{|OB|^2+|BP|^2},$$

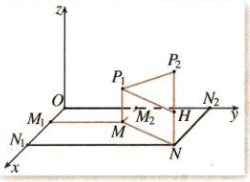
چۈنكى $|BP| = |z|$، شۇڭا $|OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ بولىدۇ.

بۇ شۇنى چۈشەندۈرىدۇكى، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى $Oxyz$ دا، خالىغان بىر $P(x, y, z)$ نۇقتا بىلەن كوئوردىنات بېشى ئارىسىدىكى ئارىلىق:

$$|OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

ئىزدىنىش

ئەگەر $|OP|$ نىڭ ئۇزۇنلۇقى مۇقىم ئۇزۇنلۇق r غا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا $x^2+y^2+z^2=r^2$ قانداق شەكىلنى ئىپادىلەيدۇ؟



7.3.4 ـ رەسىم

7.3.4 ـ رەسىمدىكىدەك، $P_1(x_1, y_1, z_1)$، $P_2(x_2, y_2, z_2)$ لەرنى بوشلۇقتىكى خالىغان ئىككى نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق ھەمدە $P_1(x_1, y_1, z_1)$، $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نۇقتىلارنىڭ xOy تەكشىلىكتىكى پروبېكسىيىلىرىنى ئايرىم ـ ئايرىم M، N دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا M، N لارنىڭ كوئوردىناتلىرى $M(x_1, y_1, 0)$، $N(x_2, y_2, 0)$ بولىدۇ.

xOy تەكشىلىكتە، $|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

P_1 نۇقتا ئارقىلىق P_2N غا تىك سىزىق ئۆتكۈزسەك (تىك ئاساسى H)، ئۇ ھالدا:

$$|MP_1|=|z_1|,\ |NP_2|=|z_2|,$$

شۇڭا $|HP_2|=|z_2-z_1|$ بولىدۇ.

$\text{Rt}\triangle P_1HP_2$ دە،

$$|P_1H|=|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

گوگو تېئورېمىسىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$$|P_1P_2|=\sqrt{|P_1H|^2+|HP_2|^2}$$
$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

شۇڭا، بوشلۇقتىكى $P_1(x_1, y_1, z_1)$، $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق:

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

مەشىق

1. ئالدى بىلەن بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا A، B ئىككى نۇقتىنى بەلگىلەڭ، ئاندىن ئۇلار ئارىسىدىكى ئارىلىقنى تېپىڭ:

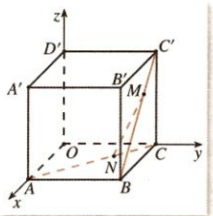
(1) $A(2, 3, 5)$, $B(3, 1, 4)$;

(2) $A(6, 0, 1)$, $B(3, 5, 7)$.

2. z ئوق ئۈستىدىن $A(1, 0, 2)$، $B(1, -3, 1)$ ئىككى نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقلىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدىغان بىر M نۇقتىنى تېپىڭ.

3. $A(10, -1, 6)$، $B(4, 1, 9)$، $C(2, 4, 3)$ ئۈچ نۇقتىنى چوققا قىلغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

4. رەسىمدىكىدەك، كۇب $OABC-D'A'B'C'$ نىڭ قىر ئۇزۇنلۇقى a، $|AN|=2|CN|$، $|BM|=2|MC'|$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، MN نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

3.4 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. $M(x, y, z)$ نۇقتا بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى $Oxyz$ تىكى بىر نۇقتا، تۆۋەندىكى شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغان نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتلىرىنى يېزىڭ:

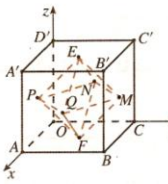
(1) M نۇقتىنىڭ x ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى؛

(2) M نۇقتىنىڭ y ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى؛

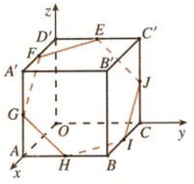
(3) M نۇقتىنىڭ z ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى؛

(4) M نۇقتىنىڭ كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى.

2. رەسىمدىكىدەك، كۇب $OABC-D'A'B'C'$ نىڭ قىر ئۇزۇنلۇقى a، E، F، G، H، I، J لار ئايرىم ـ ئايرىم $C'D'$، $D'A'$، $A'A$، AB، BC، CC' قىرلارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىك $EFGHIJ$ نىڭ ھەرقايسى چوققىلىرىنىڭ كوئوردىناتلىرىنى يېزىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

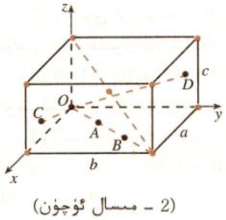


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، كۇبنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقى a ھەمدە كۇبنىڭ ھەرقايسى ياقلىرىنىڭ مەركىزى بىر گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ چوققىسى بولسا، بۇ گېئومېترىيىلىك جىسىمنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. $A(4, 1, 9)$، $B(10, -1, 6)$، $C(2, 4, 3)$ لارنى چوققا قىلغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەڭ يانلىق تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.



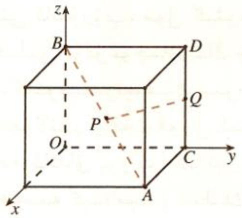
(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. قىزىل تاش (TiO_2) نىڭ كرىستال ھۈجەيرىسى رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، رەسىمدىكى رەڭلىك نۇقتىلار تىتان ئاتومىغا ۋەكىللىك قىلىدۇ. قارا نۇقتىلار كىسلورود ئاتومىغا ۋەكىللىك قىلىدۇ. پاراللېلېپىپېدنىڭ 8 چوققىسى ۋە مەركىزى تىتان ئاتومى، 4 كىسلورود ئاتومىنىڭ ئورنى $A(0.31a, 0.31b, 0)$، $B(0.69a, 0.69b, 0)$، $C(0.81a, 0, 0.5c)$ ۋە $D(0.19a, 0.81b, 0.5c)$، مەركىزىدىكى تى-

تان ئاتومى بىلەن A ئورۇندىكى كىسلورود ئاتومى ئارىسىدىكى ئارىلىق باغ ئۇزۇنلۇقى دەپ ئاتىلىدۇ. $a=b$ بولغاندا، باغ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

3. رەسىمدىكىدەك، كۇبنىڭ ئۈچ قىرى ياتقان تۈز سىزىقلارنى كوئوردىنات ئوقلىرى قىلىپ، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى $Oxyz$ تۇرغۇزۇلغان. P نۇقتا كۇبنىڭ دىئاگونالى AB نىڭ ئۈستىدە، Q نۇقتا كۇبنىڭ قىرى CD نىڭ ئۈستىدە.

(1) P نۇقتا AB دىئاگونالنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، Q نۇقتا CD قىر ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، $|PQ|$ نىڭ ئەڭ كىچىك قىممىتى ئۈستىدە ئىزدىنىڭ؛



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

(2) Q نۇقتا CD قىرنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، P نۇقتا AB دىئاگونالنىڭ ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، $|PQ|$ نىڭ ئەڭ كىچىك قىممىتى ئۈستىدە ئىزدىنىڭ؛

(3) P نۇقتا AB دىئاگونالنىڭ ئۈستىدە، Q نۇقتا CD قىرنىڭ ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، $|PQ|$ نىڭ ئەڭ كىچىك قىممىتى ئۈستىدە ئىزدىنىڭ.

يۇقىرىقى مەسىلىدىن قانداق يەكۈنگە ئېگە بولدىڭىز؟ يەكۈنىڭىزنى ئىسپاتلىيالامسىز؟

ئۇچۇر تېخنىكىسىنى قوللىنىش

«گېئومېترىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» دىن پايدىلىنىپ نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى ئۈستىدە ئىزدىنىش: چەمبەر

«گېئومېترىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» بولسا گېئومېترىيە (تەكشىلىك گېئومېترىيىسى، ستېرېئومېترىيە، ئانالىتىك گېئومېترىيە قاتارلىق) ئوقۇتۇشقا مۇۋاپىق كېلىدىغان يۇمشاق دېتال ئىش تاختىسىدىن ئىبارەت. ئۇ ئوقۇتقۇچى ۋە ئوقۇغۇچىلارنى گېئومېترىيىلىك شەكىللەرنىڭ ئىچكى مۇناسىۋىتىنى كۆزىتىدىغان ۋە ئىزدىنىدىغان مۇھىت بىلەن تەمىنلەيدۇ. ئۇ نۇقتا، تۈز سىزىق، چەمبەرنى ئاساسىي ئېلېمېنت قىلىپ، بۇ ئاساسىي ئېلېمېنتلارغا قارىتا ئالماشتۇرۇش، قۇرۇش، مۆلچەرلەش، ھېسابلاش، كارتىئونلاشتۇرۇش، ترايېكتورىيىلىك ئەگىشىش قاتارلىقلارنى ئېلىپ بېرىش ئارقىلىق، باشقا مۇرەككەپرەك بولغان شەكىللەرنى ھاسىل قىلىدۇ.


1 ـ رەسىم

«گېئومېترىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» نىڭ ئەڭ چوڭ ئالاھىدىلىكى «ھەرىكەتچانلىقى» دىن ئىبارەت، يەنى مائۇس ئارقىلىق شەكىلدىكى ھەرقانداق بىر ئېلېمېنتنى (نۇقتا، تۈز سىزىق، چەمبەر) سۈرگىلى بولىدۇ، شۇنداقلا ئىلگىرى بېرىلگەن بارلىق گېئومېترىيىلىك مۇناسىۋەتلەر (شەكىلنىڭ ئاساسلىق خۇسۇسىيىتى) ئۆزگەرمەيدۇ. شۇنىڭ بىلەن بىللە، ئۇنىڭ ھەرىكەتچانلىقى ۋە ئوبرازلىقلىقىدىن پايدىلىنىپ، گېئومېترىيىلىك شەكىللەرگە قارىتا ئەمەلىي «مەشغۇلات» ئېلىپ بارىدىغان مۇھىت يارىتىپ بەرگىلى بولىدۇ. ئوقۇغۇچىلار شەكىللەرنى خالىغانچە سۈرۈپ، شەكىللەرنى كۆزىتىپ، يەكۈنلەرنى بايقاپ، پەرەز قىلىپ ۋە ئىسپاتلاپ، كۆزىتىش، ئىزدىنىش، بايقاش جەريانىدا ھەر خىل شەكىللەرگە بولغان ھېسسىي بىلىشىنى ئاشۇرۇپ، مول گېئومېترىيىلىك تەجرىبە ئارقا كۆرۈنۈشىنى شەكىللەندۈرىدۇ، شۇ ئارقىلىق ئوقۇغۇچىلارنىڭ چۈشىنىشى ۋە ئىسپاتلىشىغا ياردەم بەرگىلى بولىدۇ.

«گېئومېترىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» نىڭ مەشغۇلاتى ئىنتايىن ئاددىي بولۇپ، بارلىق مەشغۇلاتلار پەقەت قورال ئىستونى ۋە تىزىملىك ئارقىلىق ئەمەلگە ئاشىدۇ (1 ـ رەسىم)، باشقا ھەرقانداق پروگرامما تۈزۈشنىڭ ھاجىتى يوق. «گېئومېترىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» دا، ھەممە گېئومېترىيىلىك مۇناسىۋەتلەر ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، ئۇ ئارقىلىق دەرس دېتالىنى لايىھىلەشتىكى ئەڭ مۇھىم ھالقا «گېئومېترىيىلىك مۇناسىۋەت»نى (يەنى شەكىلنىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيىتى) ئىگىلىۋېلىشتىن ئىبارەت.

تۆۋەندە بىر مىسال ئارقىلىق، «گېئومېترىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» دىن پايدىلىنىپ نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ شەكلى، دائىرىسى ئۈستىدە ئىزدىنىشنى كونكرېت چۈشەندۈرىمىز، ئاندىن ترايېكتورىيىنىڭ شەكىللىنىش سەۋەبىنى تەھلىل قىلىپ، شەكىللەنگەن ترايېكتورىيىنى تەگلىمە ئارقىلىق تەسۋىرلەيمىز.

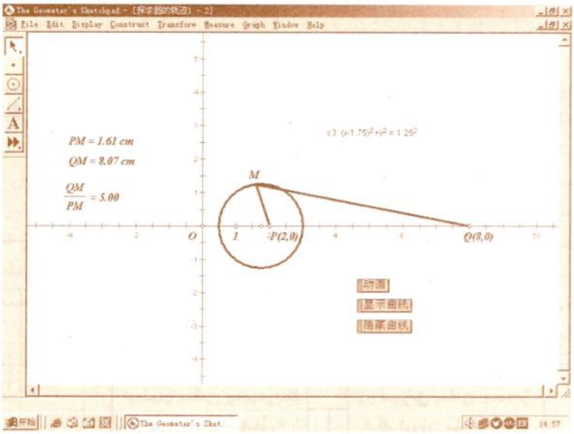
مىسال. $P(2, 0)$، $Q(8, 0)$ نۇقتىلار بېرىلگەن، M نۇقتا بىلەن P نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق ئۇنىڭ بىلەن Q نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنىڭ $\frac{1}{5}$ ىگە تەڭ بولسا، «گېئومېترىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» دىن پايدىلىنىپ M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى ئۈستىدە ئىزدىنەيلى ھەمدە ترايېكتورىيىنىڭ تەگلىمىسىنى تاپايلى.

2 ـ رەسىمدىكىدەك، مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، «گېئومېترىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» دا، $P(2, 0)$، $Q(8, 0)$ ھەمدە M نۇقتىلارنى بەلگىلەيمىز، $\frac{|MQ|}{|MP|}=5$ بولىدىغان قىلىپ M نۇقتا بىلەن P نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق ۋە M نۇقتا بىلەن Q نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى ئۆلچەيمىز. M نۇقتا ھەرىكەت قىلغاندا، $\frac{|MQ|}{|MP|}=5$ ئۆزگەرمەيدۇ، M نۇقتىنىڭ ھەرىكىتىدىن ترايېكتورىيە شەكىللىنىدۇ. M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنى چەمبەر دەپ پەرەز قىلىپ، «كوئوردېنات ئۇسۇلى» ئارقىلىق بۇ پەرەزنىڭ كۈچكە ئىگە ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلايمىز.

يېشىش: M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$|MP|^2=(x-2)^2+y^2,\quad |MQ|^2=(x-8)^2+y^2,$$

$$\frac{|MQ|^2}{|MP|^2}=\frac{(x-8)^2+y^2}{(x-2)^2+y^2}=25,$$



2 ـ رەسىم

بۇنى ئاددىيلاشتۇرساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

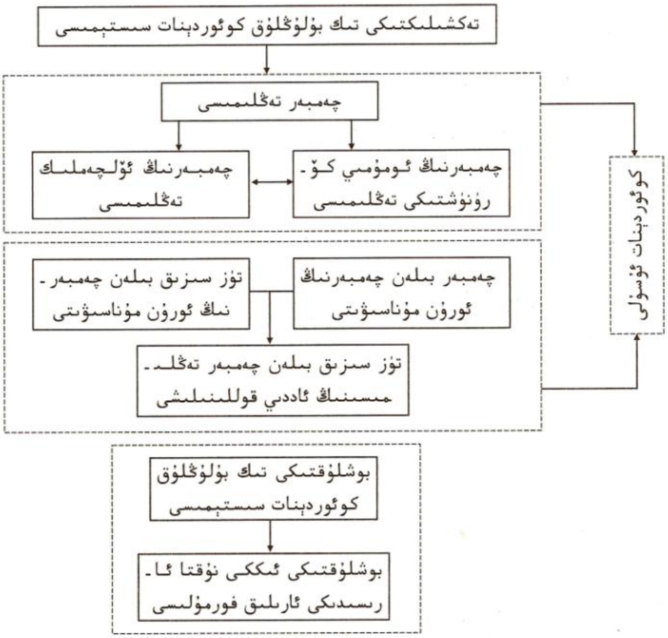
$$(x-1.75)^2+y^2=1.25^2.$$

شۇڭا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى (1.75, 0) نى مەركەز، 1.25 نى رادىئۇس قىلغان چەمبەر بولىدۇ.

شۇنىڭغا ئوخشاش، «گېئومېتىرىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» نى قوللىنىپ نۇرغۇنلىغان ترايېكتورىيىگە ئائىت مەسىلىلەر ئۈستىدە ئىزدىنىشكە بولىدۇ. «گېئومېتىرىيىلىك سىزمىچىلىق تاختىسى» بىزنى تەجرىبە قىلىش، بايقاش، پەرەز قىلىش مۇھىتى بىلەن تەمىنلەيدۇ، بۇ خىل مۇھىت ماتېماتىكىلىق پىكىر قىلىش ئۇسۇلى ئارقىلىق ئۆزىمىزنىڭ پەرىزىنى ئىسپاتلىشىمىزغا تۈرتكە بولىدۇ.

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. چەمبەر تەڭلىمىسىنىڭ قانچە خىل شەكلى بار؟ ئۇلارنىڭ ئۆز ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

2. تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر، چەمبەر بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى تەڭلىمە ئارقىلىق تەتقىق قىلىش بۇ بابنىڭ ئاساسلىق مەزمۇنلىرىنىڭ بىرى. تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر، چەمبەر بىلەن چەمبەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىشتا، تۆۋەندىكىدەك ئىككى تەرەپتىن قول سېلىشقا بولىدۇ:

(1) تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر، چەمبەر بىلەن چەمبەرنىڭ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە ياكى ئىگە ئەمەسلىكى ئۇلارنىڭ تەڭلىمىلىرىدىن تۈزۈلگەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ ھەقىقىي يېشىمى بار - يوقلۇقى بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولىدۇ. تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ قانچە گۇرۇپپا ھەقىقىي يېشىمى بولسا، تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر، چەمبەر بىلەن چەمبەر شۇنچە دانە ئومۇمىي نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ؛ تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ ھەقىقىي يېشىمى بولمىسا، تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر، چەمبەر بىلەن چەمبەر ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمايدۇ.

(2) تۈز سىزىق، چەمبەرلەرنىڭ مۇناسىۋىتىنى تەڭلىمە ئارقىلىق ماس ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ.

3. كوئوردېنات ئۇسۇلى ئارقىلىق تەكشىلىكتىكى گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشنىڭ «ئۈچ باسقۇچى»:

بىرىنچى باسقۇچ: مۇۋاپىق تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇپ، كوئوردېنات ۋە تەڭلىمە ئارقىلىق مەسىلىدىكى گېئومېتىرىيىلىك ئېلېمېنتلارنى ئىپادىلەپ، تەكشىلىكتىكى گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇش.

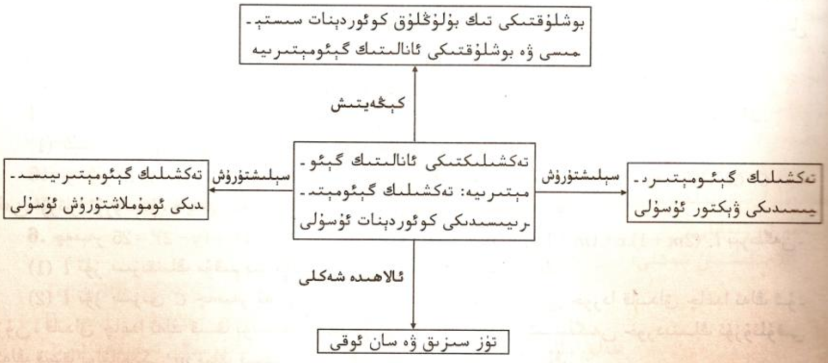
ئىككىنچى باسقۇچ: ئالگېبرالىق مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق ھېسابلاش ئارقىلىق ھەل قىلىش؛

ئۈچىنچى باسقۇچ: ئالگېبرالىق ھېسابلاش نەتىجىسىنى گېئومېتىرىيىلىك مۇناسىۋەتكە «تەرجىمە» قىلىش.

4. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى ئاساسىدا بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى قانداق تۇرغۇزۇلىدۇ؟ تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى بىلەن بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسىنىڭ ئوخشاشلىقى ۋە پەرقىنى سېلىشتۇرۇڭ.

5. ئۇچۇر تېخنىكىسى قوراللىرىنىڭ گېئومېتىرىيىلىك شەكىللەر ۋە ئۇلارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى تەتقىقاتىدىكى رولىغا ئەھمىيەت بېرىش كېرەك. بىر تەرەپتىن، ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ ياردىمىدە، كۆزىتىش، مەشغۇلات ئېلىپ بېرىش، تەجرىبە قىلىش ئارقىلىق، ماتېماتىكىلىق قانۇنىيەتلەر بايقىلىپ، پەرەز شەكىللەندۈرۈلىدۇ ھەمدە پەرەزگە قارىتا ئىسپاتلاش ئېلىپ بېرىلىدۇ؛ يەنە بىر تەرەپتىن، ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ تەڭلىمىلەرنى تەتقىق قىلىپ، ئەگرى سىزىقنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئىگىلەپ، ئۇچۇر تېخنىكىسى قوراللىرىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاپ، مەسىلىلەرگە بولغان چۈشىنىش چوڭقۇرلاشتۇرۇلىدۇ.

6. تەكشىلىكتىكى ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنىڭ ئاساسىي ئىدىيە ئۇسۇلى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ، نۇقتىنى كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلەش، تۈز سىزىق، چەمبەر قاتارلىقلارنى تەڭلىمە ئارقىلىق ئىپادىلەش ھەمدە گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ئالگېبرالىق ئۇسۇل ئارقىلىق تەتقىق قىلىشتىن ئىبارەت، بۇ كىشىلەر دائىم تىلغا ئالىدىغان «كوئوردېنات ئۇسۇلى»دۇر. بۇ خىل ئۇسۇل بىلەن تەكشىلىك گېئومېتىرىيىسىدىكى ئومۇملاشتۇرۇش ئۇسۇلى، ۋېكتور ئۇسۇلى ئارىسىدا باغلىنىش تۇرغۇزغىلى بولىدۇ، ئۇنىڭدىن باشقا ئۇنى بوشلۇققا كېڭەيتىپ ستېرېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنىمۇ ھەل قىلغىلى بولىدۇ. بۇ خىل باغلىنىشنى تۆۋەندىكىدەك رامكىلىق سخېما ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ.



تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى چەمبەرلەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) چەمبەرنىڭ مەركىزى $M(-5, 3)$ ھەمدە ئۇ $A(-8, -1)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(2) چەمبەر $A(-2, 4)$، $B(-1, 3)$، $C(2, 6)$ ئۈچ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ.

2. مەركىزى تۈز سىزىق $3x+y-5=0$ نىڭ ئۈستىدە ھەمدە كوئوردىنات بېشى ۋە $(3, -1)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن چەمبەر تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

3. چەمبەر $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ بىلەن چەمبەر $x^2+y^2-14x-2y+14=0$ نىڭ ئۆزئارا ئورۇنلاشقان ياكى ئورۇنمايدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

4. چەمبەر $x^2+y^2-10x-10y=0$ بىلەن چەمبەر $x^2+y^2-6x+2y-40=0$ نىڭ ئومۇمىي خوردىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

5. مەركىزى تۈز سىزىق $3x+2y=0$ نىڭ ئۈستىدە ھەمدە x ئوق بىلەن كېسىشىش نۇقتىسى ئايرىم-ئايرىم $(-2, 0)$، $(6, 0)$ بولغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

6. چەمبەر $x^2+y^2=4$ بىلەن چەمبەر $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ نىڭ l تۈز سىزىققا نىسبەتەن سىممېترىك ئىكەنلىكى بېرىلگەن، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

7. چەمبەر $C: (x+2)^2+(y-6)^2=1$ نىڭ تۈز سىزىق $3x-4y+5=0$ گە نىسبەتەن سىممېترىك چەمبىرىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

8. m قانداق قىممەتنى ئالغاندا، تەڭلىمە $x^2+y^2-4x+2my+2m^2-2m+1=0$ چەمبەرنى ئىپادىلەيدۇ؟ رادىئۇسى ئەڭ چوڭ بولغاندىكى چەمبەر تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. مەركىزى تۈز سىزىق $y=-2x$ نىڭ ئۈستىدە ھەمدە $A(2, -1)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، تۈز سىزىق $x+y=1$ بىلەن ئۆزئارا ئورۇنلاشقان چەمبەر تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2. $M(x, y)$ نۇقتا بىلەن ئىككى مۇقىم نۇقتا M_1، M_2 ئارىسىدىكى ئارىلىقلارنىڭ نىسبىتى بىر مۇسبەت سان m غا تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە ترايېكتورىيىسىنىڭ قانداق شەكىل ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈڭ ($m=1$ ۋە $m \neq 1$ بولغان ئىككى خىل ئەھۋالنى ئويلىشىڭ).

3. ئەگرى سىزىق $x^2+y^2=|x|+|y|$ ئارقىلىق قورشالغان شەكىلنىڭ يۈزىنى تېپىڭ.

4. تۈز سىزىق $l: x-2y-5=0$ ۋە چەمبەر $C: x^2+y^2=50$ بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ.

(1) كېسىشىش نۇقتىسى A، B لارنىڭ كوئوردىناتى؛ (2) $\triangle AOB$ نىڭ يۈزى.

5. بىر نۇر $A(-2, 3)$ نۇقتىدىن چىقىپ، x ئوقتىن قايتىپ، چەمبەر $C: (x-3)^2+(y-2)^2=1$ بىلەن ئۆزئارا ئورۇنلاشتى، قايتقان نۇر ياتقان تۈز سىزىق تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

6. چەمبەر $C: (x-1)^2+(y-2)^2=25$، تۈز سىزىق $l: (2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$ بېرىلگەن.

(1) l تۈز سىزىقنىڭ مۇقىم بىر نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

(2) l تۈز سىزىق C چەمبەر تەرىپىدىن كېسىلگەندە كېلىپ چىققان خوردا قانداق چاغدا ئەڭ ئۇزۇن، قانداق چاغدا ئەڭ قىسقا بولىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە كېسىلگەن خوردىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئەڭ قىسقا بولغاندىكى m نىڭ قىممىتى ۋە ئەڭ قىسقا ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

خاتىمە

پارتىيىنىڭ مائارىپ فاڭجېنىنى ئومۇمىيۈزلۈك ئىزچىللاشتۇرۇش ھەمدە دەۋر تەرەققىياتىنىڭ ئېھتىياجىغا ماسلىشىپ ئوقۇغۇچىلارنىڭ ئۆمۈربويى تەرەققىي قىلىشىغا ئاساس ھازىرلاش ئۈچۈن، مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ھەرقايسى پەنلەر دەرس ئۆلچەملىرى (تەجرىبە نۇسخا) گە ئاساسەن، ھەرقايسى پەنلەرنىڭ ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكلىرىنى تۈزۈپ چىقتۇق، تۈزۈش جەريانىدا مائارىپ ساھەسىدىكى كۆپلىگەن پېشقەدەملەر ۋە ھەرقايسى پەن مۇتەخەسسىسلىرىنىڭ قىزغىن ياردىمى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىشىغا ئېرىشتۇق. ھەرقايسى پەن دەرسلىكلىرى دەرس ئىسلاھاتى تەجرىبە رايونلىرىدىكى ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلار بىلەن ئاخىر يۈز كۆرۈشكەن بۇ پەيتتە، دەرسلىكلەرنىڭ باش مەسلىھەتچىسى بولغان دىڭ شىسۈن، شۈ جيالۇ، يې جىشەن، گۇ مىڭيۈەن، لۇ شىڭۋېي، ۋاڭ زىكۈن، لياڭ خېڭ، جىن چۈڭجى، بەي چۈنلى، تاۋ شىپىڭ قاتارلىق يولداشلارغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا دەرسلىك تۈزۈشكە يېتەكچىلىك قىلىش كومىتېتىنىڭ مۇدىرى يولداش ليۇ بىن ۋە كومىتېت ئەزالىرى جياڭ لەنشېڭ، لى جىلىن، ياڭ خۇەنمىڭ، گۇ لىڭيۈەن، يۈەن خاڭپېي قاتارلىق يولداشلارغىمۇ مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن «ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمى (تەجرىبە نۇسخا)» گە ئاساسەن، بىز بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتىدىكى پروفېسسور ليۇ شاۋشۆنى باش تۈزگۈچىلىككە تەكلىپ قىلىپ تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمىنى تەتقىق قىلىپ تۈزۈش گۇرۇپپىسىدىكى بىر قىسىم ئەزالار، ئالىي مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرى، ماتېماتىكا تەلىم - تەربىيە نەزەرىيىسى خىزمەت خادىملىرى، ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتۇش تەتقىقاتى خادىملىرى ۋە ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرىدىن تۈزۈش كومىتېتى تەشكىللەپ، بۇ بىر يۈرۈش ماتېماتىكا تەجرىبە دەرسلىكىنى تۈزۈپ چىقتۇق. بۇ يەردە، بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتى ماتېماتىكا پېنى ئىنستىتۇتى رەھبەرلىرىنىڭ بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكنى تۈزۈش خىزمىتىگە يۇكسەك ئەھمىيەت بەرگەنلىكى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىغانلىقىغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا مۇشۇ بىر يۈرۈش دەرسلىككە تۈزىتىش پىكرى بەرگەن ۋە ياردىمىنى ئايىمىغان مۇتەخەسسىس، ئالىم، ئوقۇتقۇچى ھەمدە جەمئىيەتنىڭ ھەرقايسى ساھەلىرىدىكى دوستلارغا مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

بۇ قىسىم دەرسلىك تۈزۈش كومىتېتىدىكى بارلىق ئەزالارنىڭ كوللېكتىپ ئەقىل - پاراسىتىنىڭ نەتىجىسىدۇر. دەرسلىكتە بېرىلگەن ئاساسلىق تۈزگۈچىلەردىن سىرت، بۇ قىسىم دەرسلىكنى مۇزاكىرە قىلىشقا قاتناشقانلاردىن ليۇ يىجۇ، يۇ چيۈشى، سۇڭ لىلى، ۋاڭ رۇڭ، جاڭ شۇمېي، لى يۇڭ، لى جيەنخۇا، شۇ يۇڭ، لۇ ۋېيچۈەن قاتارلىقلار بار.

بىز يەنە مۇشۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىۋاتقان ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلارغىمۇ رەھمەت ئېيتىمىز. سىلەرنىڭ بۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىش جەريانىدا پىكىر ۋە تەكلىپلەرنى بىزگە ئۆز ۋاقتىدا يەتكۈزۈپ بېرىشىڭلارنى ئۈمىد قىلىمىز، شۇنداقلا سىلەرگە چوڭقۇر مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز. ھەممەيلەن قول تۇتىشىپ ئوقۇتۇش ماتېرىيالى قۇرۇلۇش خىزمىتىنى بىرلىكتە ئورۇندايلى.

ئالاقىلىشىش شەكلى:

Tel: (010) 58758321

E-mail: jcfk@pep.com.cn zhangjs@pep.com.cn

خەلق مائارىپ نەشرىياتى دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات ئورنى

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات - ئېچىش مەركىزى

ISBN978-7-5370-6732-4
9 787537 067324 >
باھاسى: 9.56 يۈەن